

DAEU-B / Maths

Lundi 4 Janvier

(suite)

4bis

$$h(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ // parabole}$$

$\rightarrow$  Vu :  $h$  dérivable en 2 et  $\underline{h'(2)=6}$ .

$\rightarrow$  Et en -1 ?

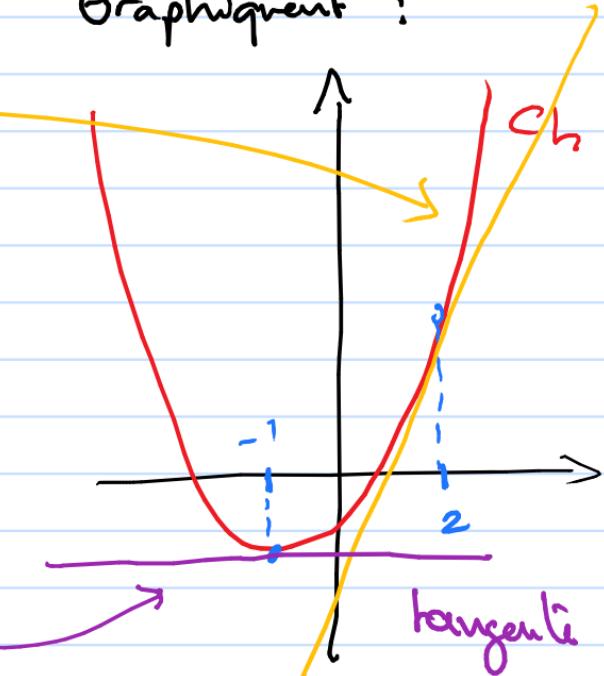
$$\frac{h(x) - h(-1)}{x - (-1)} = \frac{(x^2 + 2x + 1) - (1 - 2 - 1)}{x + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

Orc ;  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

clue ; 
$$\left| \frac{h(x) - h(-1)}{x - (-1)} = x + 1 \right. \xrightarrow{x \rightarrow -1} -1 + 1 = \textcircled{0}$$

Cond :  $h$  est aussi dérivable en -1, et  $h'(-1)=0$

Graphique :



tangenti  
en -1  
est  
horizontale  
(coeff dir = 0 !)

⑤  $k(x) = |x|$  dérivable en 0 ?

1. taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Rappel :  $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2. limite en 0 ?

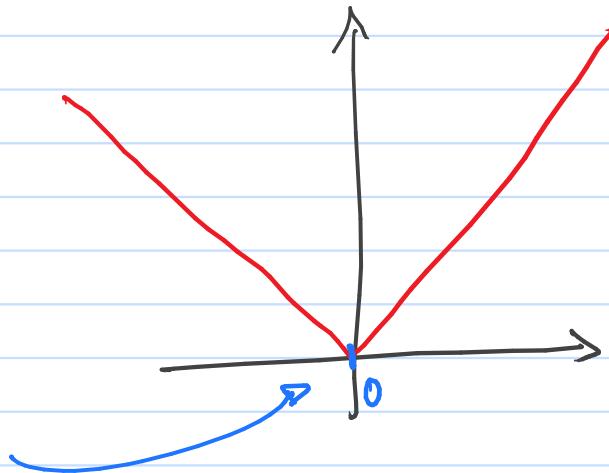
Ici :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = 1$  (à droite)

#

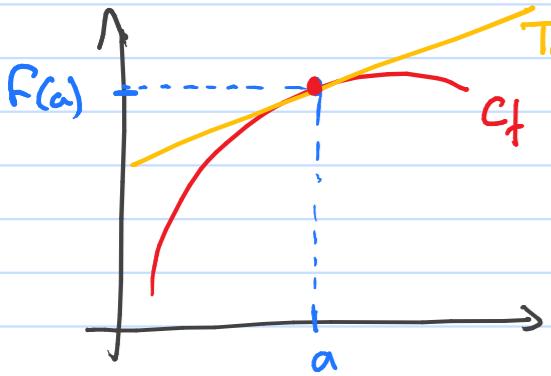
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = -1$$
 (à gauche)

Donc pas de limite en 0 !!

Conclusion : PAS dérivable en 0 !



## Complément sur la tangente à Cf en $x=a$ :



Not<sup>o</sup>: Ta

Vu, le coeff. dir. de Ta

$= f'(a)$ ,  
la dérivée de f en a.

En fait, on a :

une équation de Ta est:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Ex: •  $h(x) = x^2 + 2x - 1$ . Vu,  $\begin{cases} h'(2) = 6 \\ h'(-1) = 0 \end{cases}$

On a :

\* Équation de la tangente à Ch en 2 :

$$y = \underbrace{h'(2)}_{6}(x-2) + h(2) \quad \text{avec } h(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$$

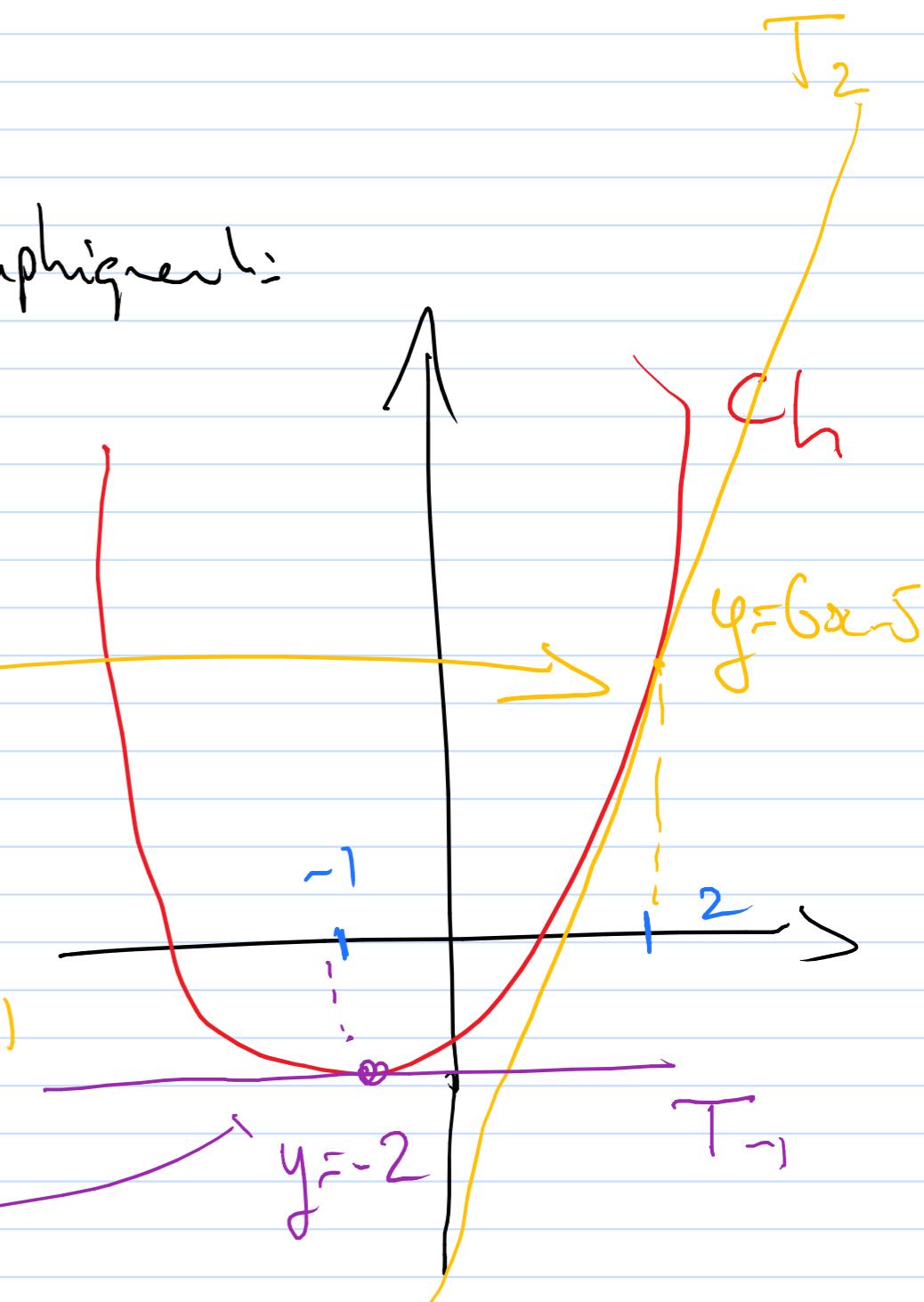
Solv:  $y = 6(x-2) + 7 = 6x - 5$

\* Équation de la tangente à Ch en -1 :

$$y = \underbrace{h'(-1)}_{0} \cdot (x - (-1)) + h(-1) \quad \text{avec } h(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -2$$

Solv:  $y = -2$

Graphique:

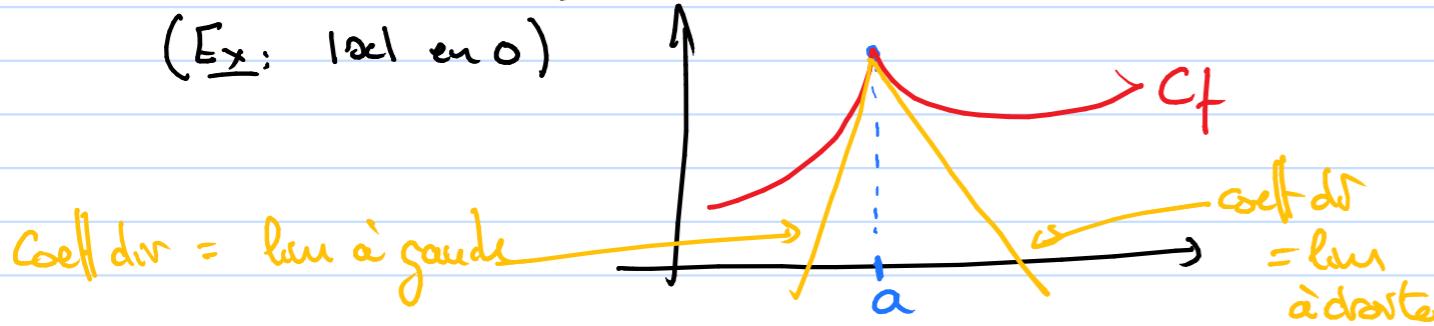


Cas où une fonction  $f$  n'est PAS dérivable en un point  $a$ :

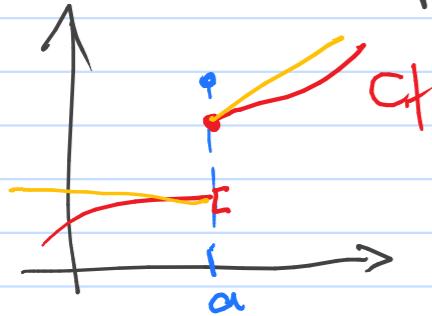
Vu:  $f$  est dérivable en  $a$  si  
et {  
     $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe (1)  
     $\rightarrow \dots$  et c'est un nombre fini (fini) (2)

(a). Si la lim à gauche  $\neq$  lim à droite . (1)

(Ex: 1st en 0)

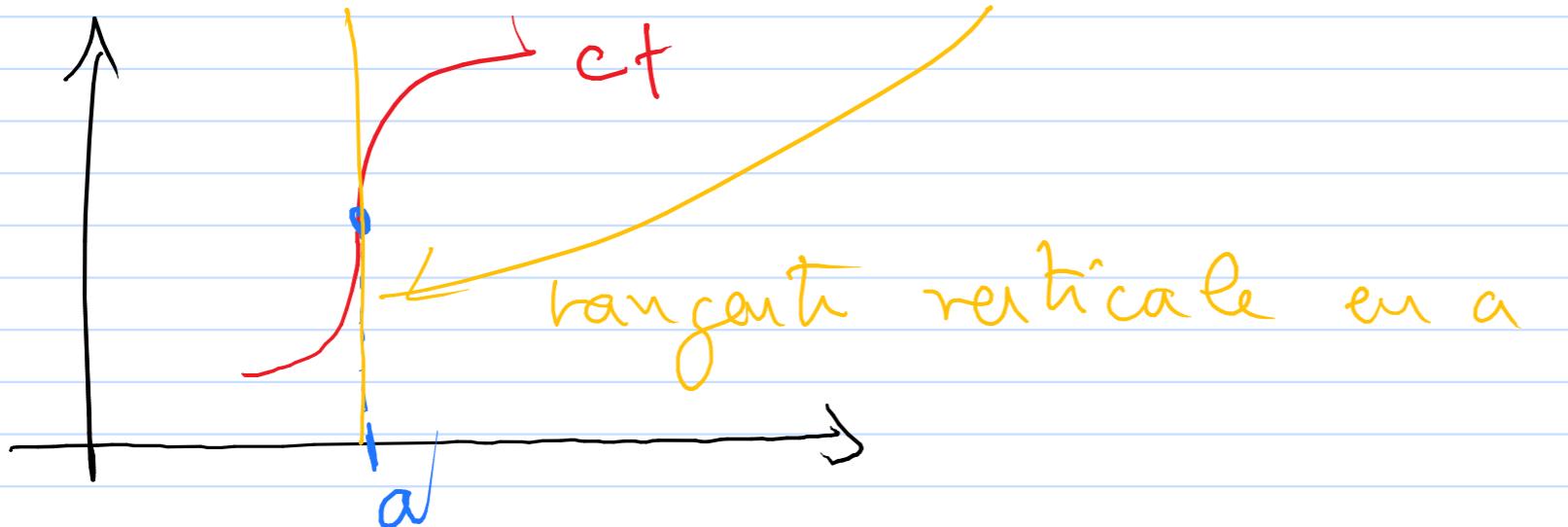


(b). Pire si  $f$  n'est pas continue en  $a$ ! (1)



alors la tangente en  $a$   
n'existe pas non plus

(c) la limite existe ... mais c'est  $\pm \infty$  (2)



Si  $f$  n'est pas continue en  $a$ ,  
alors  $f$  n'est pas dérivable en  $a$   
c.-à-d.

Si  $f$  dérivable en  $a$ ,  
alors elle est continue en  $a$ .

### Exercice n° 1

En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction  $f(x) = x^2 + x - 1$  est dérivable en 1 et calculer  $f'(1)$ .

(dérivée en un point)



### Exercice n° 2

Sach.  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

En utilisant la définition de la dérivée, trouver la formule de la fonction dérivée de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , puis déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 3.

↳  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .



Exo 1 :  $f(x) = x^2 + x - 1$  en  $a=1$

1. taux d'accroissement:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{(x^2 + x - 1) - (1+1-1)}{x-1} = \frac{x^2 + x - 2}{x-1}$$

Or  $x^2 + x - 2 = \underline{x^2 - 1} + x - 1$

$$= (\underline{x-1})(\underline{x+1}) - (\underline{x-1}) = (\underline{x-1})(x+2)$$

Prem: on peut aussi faire avec le  $\Delta$ :

$$x^2 + x - 2 \text{ vs } \Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

d'ou 2 racines:  $\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{array} \right.$

d'où la factorisation

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

du coup:  $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$ .

2. limite en 1:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1+2 = 3$ .

Concl:  $f$  dérivable en 1 et  $f'(1) = 3$ .

## Exercice n° 2

En utilisant la définition de la dérivée, trouver la formule de la fonction dérivée de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , puis déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 3.

→ Dérivable en  $a=3$  ?

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(3)}{x-3} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3x} - \frac{x}{3x} = \frac{3-x}{3x} \\ &= \frac{(3-x)/3x}{x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a/b}{c} = \frac{a}{bc} \\ &= \frac{(3-x)}{(x-3) \cdot 3x}\end{aligned}$$

Solv :

$$\boxed{\frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \frac{-1}{3x}}$$

→ Limite en 3 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \frac{-1}{3 \times 3} = \boxed{-\frac{1}{9}} = f'(3)$$

Tangente en 3 :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$

rci :  $y = -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3}$  est une équation.

## Exercice n° 2

En utilisant la définition de la dérivée, trouver la formule de la fonction dérivée de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , puis déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 3.

→ Déivable en  $a=3$ ? pour  $a \neq 0$  quelconque?

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x-a} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} \quad \leftarrow \\ &= \frac{(a-x)/ax}{x-a} \quad \leftarrow \\ &= \frac{(a-x)}{(x-a) \cdot ax} \quad \leftarrow\end{aligned}$$

$$\frac{a/b}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$(a-x) = - (x-a)$$

Solv:

$$\boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{-1}{ax}}$$

→ limite en 3 :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{-1}{ax} = \boxed{\frac{-1}{a^2}} \quad \leftarrow \text{la dérivée de } f(x) = \frac{1}{x} \text{ en } a,$$

pour n'importe quelle  
nombre  $a \neq 0$ .

Rem pour  $a=3$ , on retrouve bien  $f'(3) = -\frac{1}{9}$ .

Bilan: Pour n'importe quel nombre  $a \neq 0$ ,  
la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  //  
est dérivable,  
et

$$f'(a) = \frac{-1}{a^2} //$$

une nouvelle  
formule,  
donc une nouvelle  
fonction, qui exprime  
la dérivée de  $f$   
en tout point  $a \neq 0$ .

C'est ce qu'on  
appelle la  
(fonction) Dérivée de  $f$ .