DAEU-B / Maths

Lundi 30 Novembre

- Correction d'exercices sur les limites -

Ex 2

(4). a. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1}$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{2x+1}{\left(\frac{1}{x}-2\right)}$, pour $\alpha = +\infty$ et $-\infty$.

} Faits le lundi 16/11.

c. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1/x}{2/\sqrt{x}}$, pour $\alpha = +\infty$. } Fait le mardi 17/11.

d. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\frac{1}{x}-2}{\frac{-3}{\sqrt{x}}}$, pour $\alpha = +\infty$.

e. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{2x^2+3x+4}{3x^2+5}$, pour $\alpha = 0$ et $+\infty$.

d. On pose $f(x) = \dfrac{1/x - 2}{-3/\sqrt{x}}$.

Méthode 1 (en simplifiant) : en mult. par $\sqrt{x}$ $\begin{cases}\text{en haut}\\ \text{en bas.}\end{cases}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\times(1/x-2)}{\sqrt{x}\times(-3/\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}/x - 2\sqrt{x}}{-3}$$

$$= \frac{1/\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{-3}$$

soit : $f(x) = \underbrace{\dfrac{-1}{3\sqrt{x}}} + \underbrace{\dfrac{2}{3}\sqrt{x}}$

limite en $+\infty$: On a : $\begin{cases} \cdot \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-1}{3\sqrt{x}} = 0 \\ \cdot \dfrac{2}{3}\sqrt{x} = +\infty \end{cases}$

donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Méthode 2 (par quotient)

* $f(x) = \dfrac{1/x - 2}{-3/\sqrt{x}}$. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x} - 2 = 0 - 2 = -2 \\ \lim\limits_{+\infty} -3/\sqrt{x} = 0^- \end{cases}$ NEGATIF

donc, par quotient,

$$\boxed{\lim_{+\infty} f(x) = +\infty}$$

e. $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{3x^2 + 5}$ ||

* limite en 0 : On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} 2x^2 + 3x + 4 = 0 + 0 + 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0} 3x^2 + 5 = 0 + 5 = 5 \end{cases}$ //

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 4/5}$

* limite en $+\infty$: donne une F.I. type " $\frac{\infty}{\infty}$ " //

Mais : $g(x) = \dfrac{\cancel{x^2}(2 + 3/x + 4/x^2)}{\cancel{x^2}(3 + 5/x^2)} = \dfrac{2 + 3/x + 4/x^2}{3 + 5/x^2}$ (récurrence 5)

or. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + 3/x + 4/x^2 = 2 + 0 + 0 = 2 \\ \lim\limits_{+\infty} 3 + 5/x^2 = 3 + 0 = 3 \end{cases}$ //

donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{3}}$

Ex 4 : limites en $+\infty$ et $-\infty$ de

g. $v(x) = \dfrac{-x^3+10x^2+1}{x^2+5}$.

h. $w(x) = \dfrac{2x^2+5678}{(x-3)^2}$.

(encore du type $\dfrac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$!) ⇝ F.I. " $\dfrac{\infty}{\infty}$ "

Réponse :

$$\lim_{x\to\pm\infty} w(x) = \boxed{2}$$

Les toujours la même méthode :

Factoriser (en haut et en bas) par le terme de + haut degré

$$v(x) = \frac{-x^3+10x^2+1}{x^2+5} = \frac{x^3\times(-1+10/x+1/x^3)}{x^2(1+5/x^2)}$$

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x(-1+10/x+1/x^3)}{(1+5/x^2)}$$

Num : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\times\underbrace{(-1+10/x+1/x^2)}_{\to -1} = -\infty$

Dénom : $\lim\limits_{+\infty} 1+5/x^2 = 1$ (positif)

donc $\lim\limits_{+\infty} v(x) = -\infty$

Par contre, en $-\infty$:

- $\lim\limits_{-\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty}\times\underbrace{(-1+\overset{\to 0}{10/x}+\overset{\to 0}{1/x^2})}_{\to -1} = +\infty$
- $\lim\limits_{-\infty} 1+5/x^2 = 1$

donc

$$\lim_{-\infty} v(x) = +\infty$$

Exercice n° 6

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 1/3[\cup]1/3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-6}{3x-1}$.) encore la m̂ forme.

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.))

4 limites à Calculer : en $-\infty$, en $+\infty$, et à gauche/droite de $\frac{1}{3}$

* Pour les limites en $\pm\infty$; on simplifie f :

$$f(x) = \frac{x^2-6}{3x-1} = \frac{x^2(1-6/x^2)}{x(3-1/x)} = \frac{x(1-6/x^2)}{3-1/x}$$

. Dénom : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3$ positif

. Numérateur : $\begin{cases} \cdot \lim\limits_{+\infty} x(1-6/x^2) = +\infty \\ \cdot \lim\limits_{-\infty} x(1-6/x^2) = -\infty \end{cases}$ ($6/x^2 \to 0$)

Conc :

$$\boxed{\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} f(x) = -\infty}$$

$f(x) = \frac{x^2-6}{3x-1}$: limite à gauche/droite de $1/3$?

- Numérateur : $\lim_{x \to 1/3} x^2 - 6 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 = \frac{1}{9} - 6 = \frac{-53}{9}$ NEGATIF

- Dénominateur : là on distingue gauche/droite :

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1/3^-} 3x-1 = 0^- \\ \lim_{x \to 1/3^+} 3x-1 = 0^+ \end{cases}$$

car si $x < \frac{1}{3}$, alors $3x-1 < 0$

(... $3x-1 > 0$)

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 1/3^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1/3^+} f(x) = -\infty}$$

(par quotient).

b. Asymptotes ?

On a trouvé :

- $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$

ne donne pas d'asymptote //.

- $\lim_{1/3^-} f(x) = \boxed{+\infty}$
- $\lim_{1/3^+} f(x) = \boxed{-\infty}$

La droite $x = \frac{1}{3}$ est asymptote VERTICALE au graphe de f.

[Rappel : si on avait trouvé, par ex. $\lim_{+\infty} f(x) = -3$ (un nombre)

alors on aurait eu : $\boxed{y = -3}$ est asympt. HORIZONTALE

Exercice n° 8

Soit f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$.

a. Démontrer que pour tout $x \geq 5$, on a $\boxed{0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

($\sqrt{x-5}$ ns il faut : $x-5 \geq 0$ $\Leftrightarrow x \geq 5$.)

2 inégalités à montrer.

a. Soit $x \geq 5$.

- Montrons $0 \leq f(x)$: . On a toujours $\boxed{\sqrt{x-5} \geq 0}$
  . $\boxed{x \geq 0}$ puisque $x \geq 5$.

donc $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x} \geq 0}$

- Montrons $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$:

(brouillon : $1/\sqrt{x} = \sqrt{x}/\sqrt{x}\times\sqrt{x} = \sqrt{x}/x$.)

Rédaction : On a toujours :

$$x-5 \leq x$$

Car la fonct° $\sqrt{x}$ est CROISSANTE $\Longleftrightarrow$ $\sqrt{x-5} \leq \sqrt{x}$

div. par x (>0)

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{x-5}}{x}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{1/\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f(x) \leq 1/\sqrt{x}}$$

!

b. limite en $+\infty$:

On a : $0 \leq f(x) \leq 1/\sqrt{x}$

or $\lim\limits_{+\infty} 1/\sqrt{x} = 0$

donc par le thm des Gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0}$

Déterminer dans chacun des cas la limite demandée.

1. $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{1}{-2x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-3)\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-4x}{x-3}$ $-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3}{4-2x}$ $+\infty$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+2-3x}{x}$ -3

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x} - 3$

signe de $-2x-6$?

1. à droite de -3 :

$x > -3 \iff -2x < 6$

$\iff -2x-6 < 0$

donc :

$\lim\limits_{-3^+} -2x-6 = 0^-$

donc : $\lim\limits_{-3^+} \dfrac{1^{\text{(positif)}}}{-2x-6} = \boxed{-\infty}$

0^-

2. Regardons les 2 facteurs de ce produit :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$ positif

$\sqrt{x} \to 0^+$ donc $\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (x-3) = -3$ négatif

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{0^+} \left(\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-3)\right) = -\infty}$

4. Nous :

- $\lim\limits_{x\to 2^-} x^3 = 2^3 = 8$ (positif).

- $\lim\limits_{x\to 2^-} 4-2x = 0^+$ (positif)

$x < 2 \iff -2x > -4$

$\iff 4-2x \boxed{> 0}$

donc par quotient,

$$\boxed{\lim_{2^-} \frac{x^3}{4-2x} = +\infty}$$