DAEU-B / Maths

Lundi 30 Novembre

- Cours sur la CONTINUITÉ -

1 Définition (Continuité en 1 point)

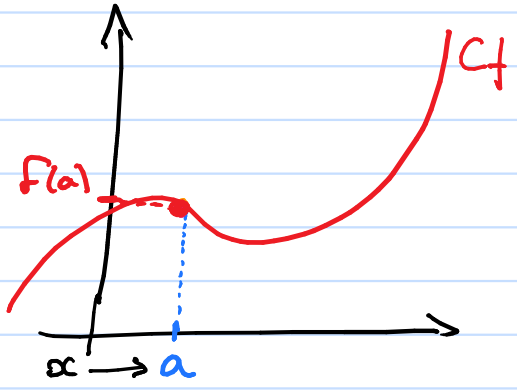
+ 2 CONSÉQUENCES IMPORTANTES

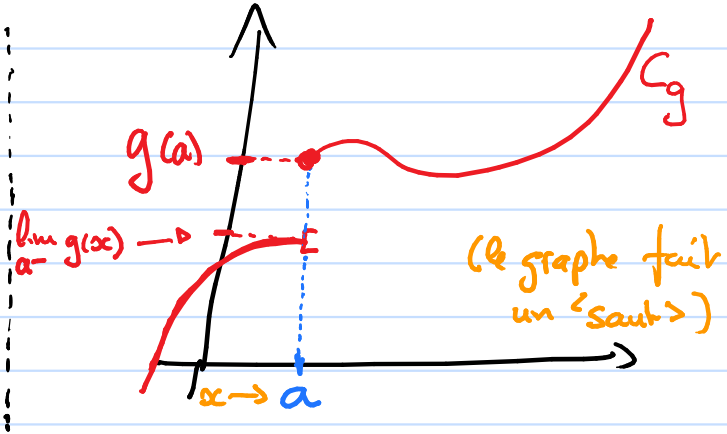
→ Thm. des Valeurs Intermédiaires

→ Notion de fonction Réciproque

I) Notion de Continuité

Idée : faire la distinction entre





FONCTION CONTINUE en a

qd x se rapproche de a, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de $f(a)$.

$$\boxed{\lim_{a} f(x) = f(a)}$$

Fonction NON CONTINUE en a

qd x se rapproche de a par la gauche, les valeurs de $f(x)$ ne se rapprochent PAS de $f(a)$;

$$\boxed{\lim_{a^-} g(x) \neq g(a)}$$

DEFINITION : f une fonction et $\boxed{a \in D_f}$

a n'est PAS valeur interdite

On dit que

f est CONTINUE en a, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Rem 1 : en particulier $\lim_{a} f(x)$ existe

Rem 2 : Si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ ||

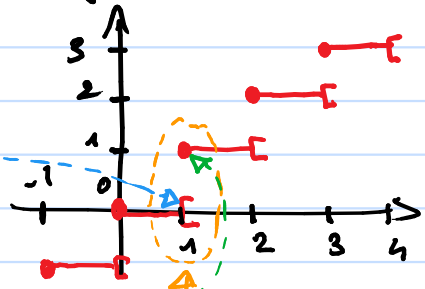
alors f n'a pas de limite en a,

et donc f n'est PAS continue en a.

1 On connait un exemple "de référence" :

Fonction partie Entière :

$E(x)$



$$\lim_{1^-} E(x) = 0$$

$\neq$

et

$$\lim_{1^+} E(x) = 1$$

Pas continue en 1

(de m̂, $E(x)$ n'est pas continue en a pour tout ENTIER a)

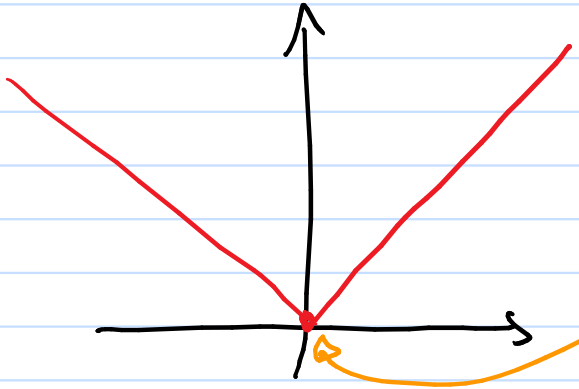
② ... Par contre la Valeur Absolue est continue en 0 :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On a
- $\lim\limits_{0^+ \ (x>0)} |x| = \lim\limits_{0^+} x = 0$
- $\lim\limits_{0^- \ (x<0)} |x| = \lim\limits_{0^-} (-x) = 0$

$\lim\limits_{0} |x| = 0 = |0|$

CONTINUE en 0.



les 2 morceaux de droites se recollent bien.

... En fait :

* Toutes les fonctions de référence, (à part la partie Entière.) <u>sont</u> des fonctions continues pour toutes valeurs !

* les { Sommes / Différences
  Produit / Quotient
  Composées
  } de fonctions continues sont <u>encore</u> des fonctions Continues !

Concrètement, la question va se poser pour ce genre de fonction :

③ $f(x) = \begin{cases} x^3 - 9 & , \text{si } x > 2 \\ 1 - x & , \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

Rem on a vu ce genre de choses avec $|x|$

} FONCTION définie par PLUSIEURS Formules (Suivant les valeurs de x)

? Est ce que f est continue en 2 ?
pour cela il faut voir si $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

on a $f(2) = 1 - 2$
$f(2) = -1$

Puisque la formule pour f change suivant $\begin{cases} x > 2 \\ x < 2 \end{cases}$, il faut calculer limite à gauche/droite :

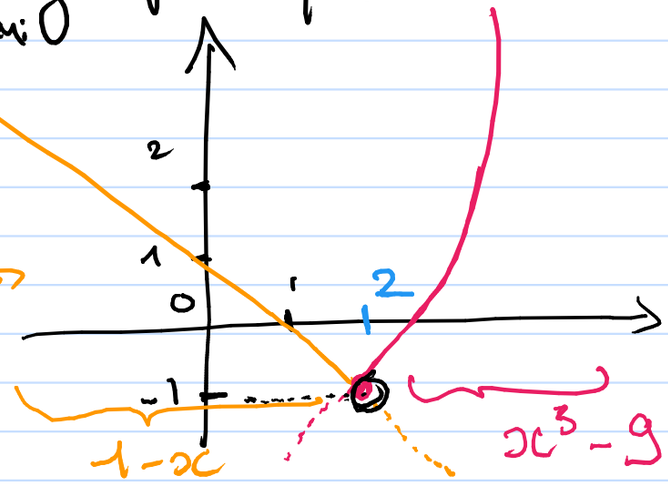
- A gauche de 2 ($x < 2$) :
  $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 1 - x = -1$
- A droite de 2 ($x > 2$)
  $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^3 - 9 = 2^3 - 9 = 8 - 9 = -1$

Etudier les limites à gauche/droite des valeurs "de recollement".

Concl : $\boxed{\lim_{2} f(x) = -1 = f(2) \text{ donc } f \text{ CONTINUE en } 2}$

Graphiquement, cela signifie que les 2 "morceaux de courbes" se recollent bien :

$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9 & \text{si } x > 2 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$



Exercice n° 1

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer si elle est continue sur $\mathbb{R}$.

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 - 9, & \text{si } x > 2 \\ -1, & \text{si } x \leq 2. \end{cases}$

b. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 3, & \text{si } x \neq 0. \\ 3, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

c. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+2}, & \text{si } x < \frac{2}{3}. \\ 3x - 2, & \text{si } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$

a

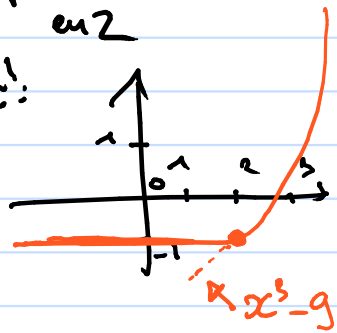
$\cdot \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{2^+} x^3 - 9 = -1$

$\cdot \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{2^-} -1 = -1$

$\lim_{2^+} f(x) = \lim_{2^-} f(x) = -1 = f(2)$

donc f continue en 2

(Graphique :



b. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 3, & \text{si } \boxed{x \neq 0} \\ 3, & \text{si } \boxed{x = 0.} \end{cases}$ ← $x > 0$ ou $x < 0$

c. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+2}, & \text{si } x < \frac{2}{3}. \\ 3x - 2, & \text{si } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$

(b). Lim. à gauche de 0 : $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} \frac{1}{x} + 3 = -\infty$ ($\frac{1}{x} \to -\infty$)

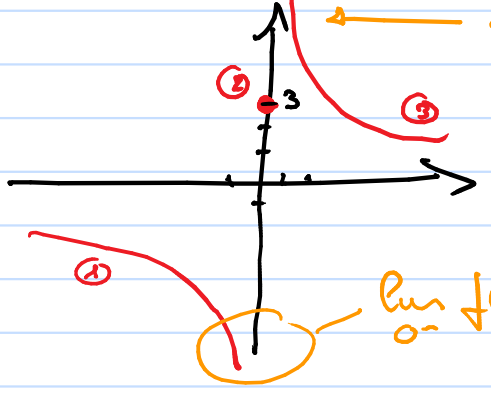
Or $f(0) = 3$

donc on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$!

Donc $\boxed{f \text{ n'est } \underline{\text{pas}} \text{ continue en } 0 \text{ !}}$

Graphiquement :

Les 3 morceaux
Ne se recolle pas
du tout



de m̂, $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$
donc
$x = 0$ asymptote.

c. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+2}, & \text{si } x < \frac{2}{3}. \\ 3x-2, & \text{si } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$ ← à gauche ← à droite

• limite à gauche de $\frac{2}{3}$ $(x < \frac{2}{3})$:

$$\lim_{2/3^-} f(x) = \lim_{2/3^-} \sqrt{-3x+2} = \sqrt{-3 \times \frac{2}{3} + 2} = \sqrt{-2+2} = 0$$

• limite à droite de $\frac{2}{3}$ $(x > \frac{2}{3})$:

$$\lim_{2/3^+} f(x) = \lim_{2/3^+} 3x-2 = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 2-2 = 0$$

donc $\boxed{\lim_{2/3} f(x) = 0} = f(2/3)$

donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

Graphe de f :