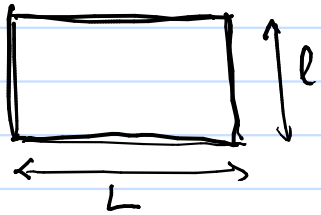
DAEU-B / Maths

Mardi 24 Novembre

Exercice n° 8 (L'enclos)

Un fermier possède une chèvre, qu'il met à brouter chaque jour dans un endroit différent de son pré. Il possède une cloture électrique de longueur totale 12m et souhaite délimiter un enclos rectangulaire de surface maximale. Déterminer la forme de l'enclos et la surface obtenue.

Surface :



Aire $= l \times L$

Ce qu'on sait : $2\times(l+L) = 12$ ← relation entre l et L : $l + L = 6$ soit : $\boxed{L = 6 - l}$

donc

$$\text{Aire} = (6-L)\times L = 6L - L^2$$

↑ de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$

la partie "modélisation"

donc son évolution de l'Aire en fonction de la longueur L est donnée par le TV :

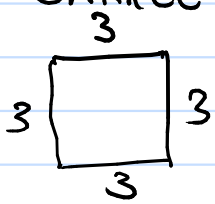
L	0		12
Aire	↗	MAX	↘

ce qu'on veut

Le cours nous dit que le max est atteint $\boxed{L = -b/2a}$

ici, pour $L = \frac{-6}{2\times(-1)} = 3$! Cond : $\boxed{L = 3}$

Rem : on aura une surface CARRÉE : $L = l = 3$



Exercice n° 10

Etudier la limite en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$. valeur absolue

(y a-t-il une limite en 0, et si oui, laquelle ?)
sinon : à gauche / droite ?

Rappel : $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{donc} & f(x) = \frac{x}{x} = 1 & \text{si } \cancel{x \geq 0} \\ \text{et} & f(x) = \frac{-x}{x} = -1 & \text{si } \cancel{x \leq 0} \end{array}}$$

$x > 0$

$x < 0$

Graphe de f :

On regarde donc les limites à gauche et droite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

et f n'admet PAS de limite en 0 !

(car $\lim_{0^+} f(x) \neq \lim_{0^-} f(x)$ ...)

Rem : dans l'exo 10, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ pas def. en 0

et n'a pas de limite en 0.

Mais ça n'est pas tjs comme ça :

Par ex : $g(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas def. en 0

Mais g ADMET une limite en 0

car $\underbrace{\lim_{0^+} \frac{1}{x^2}}_{\text{droite}} = \boxed{+\infty} = \underbrace{\lim_{0^-} \frac{1}{x^2}}_{\text{gauche}}$

donc $\boxed{\lim_{0} g(x) = +\infty}$

Retour au cours : Comparaison de Limites

① Théorème des Gendarmes.

Si $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$

et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = L$ ← un NOMBRE (pas $\pm\infty$!)

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = L$

Ex (9e) : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$?

On sait que $1 \geq \cos x \geq -1$, pour tout x.

$\overset{!}{\Longleftrightarrow}$ $1 \geq \cos^2 x \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ $0 \geq \cos^2 x - 1 \geq -1$

$\Longleftrightarrow$ $\left[0 = \dfrac{0}{x^2} \geq \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2} \geq \dfrac{-1}{x^2} \right]$

Cl. : $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0 \end{cases}$

donc, par thm des gendarmes

$$\boxed{\lim_{+\infty} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = 0}$$

② MAJORATION

Si $\boxed{f(x) \geq g(x)}$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ aussi.

Ex : $f(x) = x - \sin x$: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$?

On part de $1 \geq \sin x \geq -1$ quelque soit x

$\Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{x - 1 \leq x - \sin x} \leq x + 1$

Or $\lim\limits_{+\infty} x - 1 = +\infty$ (ici : $g(x) = x - 1$)

donc (par comparaison de limite)

$$\boxed{\lim_{+\infty} x - \sin x = +\infty}$$

Exo $f(x) = \cos^2 x - x^2$. $\lim\limits_{+\infty} f(x)$?

③ MINORATION

Si $\boxed{f(x) \leq g(x)}$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ aussi

Exemple : $f(x) = \cos^2 x - x^2$. $\lim\limits_{+\infty} f(x)$?

On a, quelque soit x :

$$\boxed{1 \geq \cos x \geq -1}$$

page suivante.

donc

$$1 \geq \cos^2 x \geq 0$$

et donc $\boxed{1 - x^2 \geq \underbrace{\cos^2 - x^2}_{f(x)} \geq -x^2}$

ici $g(x) = 1 - x^2$

Or $\lim\limits_{+\infty} 1 - x^2 = -\infty$

donc par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \cos^2 x - x^2 = -\infty}$

Remarque : inégalités de Carrés.

On sait que $f(x) = x^2$ est strict^t ↗ sur $[0, +\infty[$:

si $a \geq b \geq 0$, alors $a^2 \geq b^2 \geq 0$

et elle est strict^t ↘ sur $[0; +\infty[$:

si $0 \geq c \geq d$, alors $d^2 \geq c^2 \geq 0$

Donc :

* Si, par ex, $\boxed{\begin{array}{c} 2 \geq x \geq -3 \\ ? \geq x^2 \geq ? \end{array}}$

il faut distinguer :

- si $2 \geq x \geq 0$, alors $4 \geq x^2 \geq 0$
- si $0 \geq x \geq -3$, alors $9 \geq x^2 \geq 0$

donc finalement : $\boxed{9 \geq x^2 \geq 0}$

* Si $1 \geq X \geq -1$, alors
  - ↗ si $1 \geq X \geq 0$, alors $1 \geq X^2 \geq 0$
  - ↘ si $0 \geq X \geq -1$, alors $1 \geq X^2 \geq 0$

donc : $\boxed{1 \geq X^2 \geq 0}$ //

* Notion d'ASYMPTOTE (dernière partie du cours)

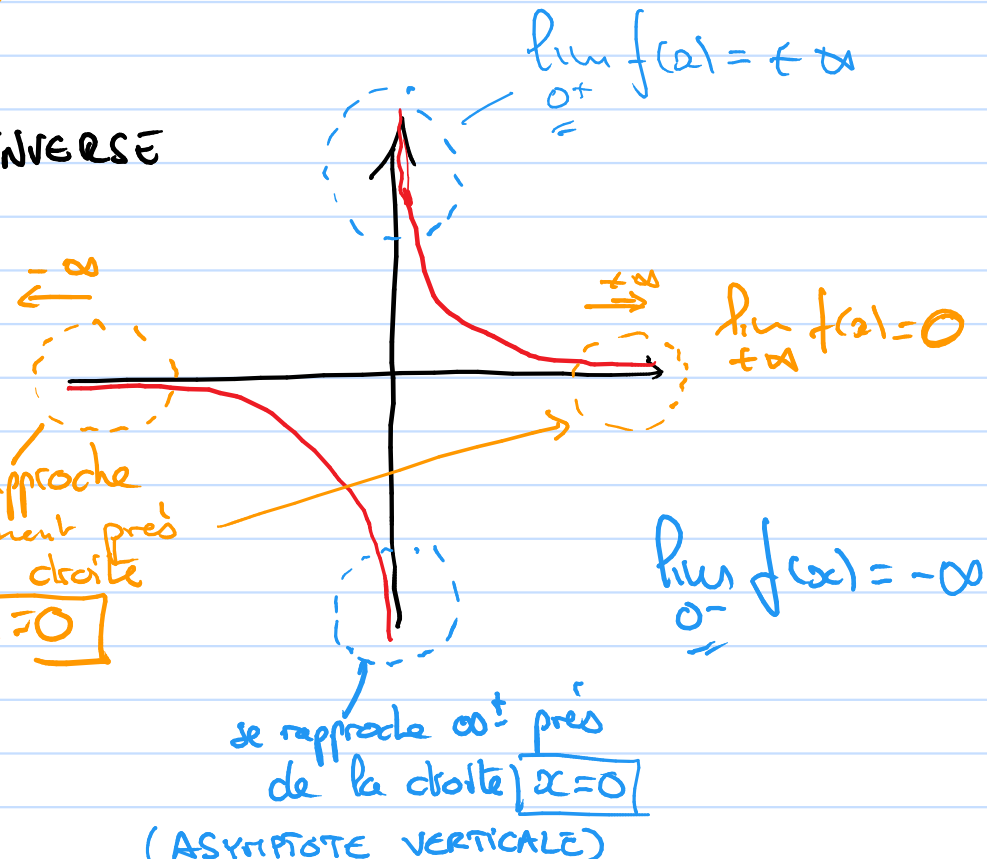
interpréter géométriquement les calculs de limite

Une droite dont le graphe de notre fonction se rapproche INFINIMENT près (sans jamais l'atteindre)

Revenons sur la fonction INVERSE

$f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^*$



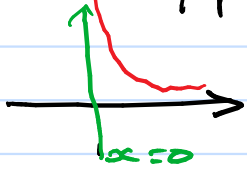
On dit que $y=0$ est une ASYMPTOTE HORIZONTALE

Definitions : f une fonction et C_f son graphe

- C_f a une ASYMPTOTE VERTICALE $x = k$ (un nombre)

  si $\lim\limits_{x \to k} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

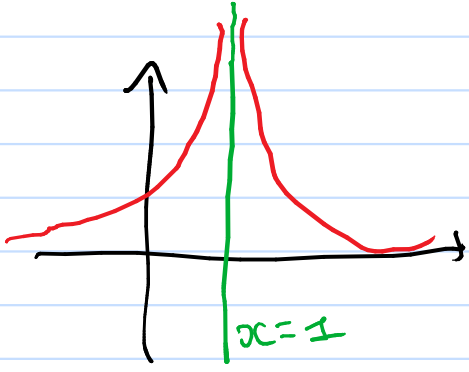
Ex1 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $x = 0$ asympt. verticale



Ex2 : $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty}$

donc $\boxed{x = 1}$

est asymptote verticale à C_f



(suite)

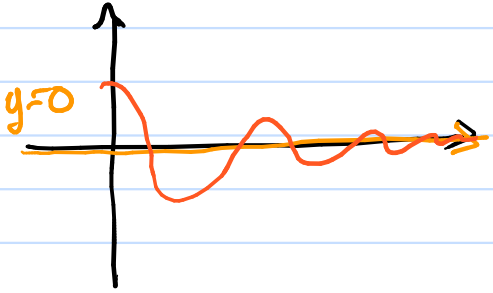
- C_f admet une ASYMPTOTE HORIZONTALE $y = c$ (un nombre)

  si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$

  ($+\infty$ ou $-\infty$)

Ex1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$

donc $y = 1$ asymt. horiz.



Ex2 (vu hier) : $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\boxed{y=0}$ asymt. horizontale

Conclusion

$\boxed{\text{En résumé}}$:

- Si $\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$ $\rightsquigarrow$ $x = k$ asymp. verticale

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ $\rightsquigarrow$ $y = c$ as. horizontale