DAEU-B / Maths

Mardi 24 Novembre

(suite)

Résumé :

- Si $\boxed{\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty}$, alors C_f admet $\boxed{x = k}$ comme asymptote verticale

- Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c}$, alors C_f admet $\boxed{y = c}$ comme asympt. horizontale

Application :

Exercice n° 13

Déduire de chacune des limites suivantes (lorsque c'est possible), l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. ← on ne peut rien dire

b. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. ← $y = 2$ est asymptote HORIZONTALE à C_f.

c. $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$. ← $x = 3$ est asympt. VERTICALE à C_f.

d. $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$. ← on ne peut rien dire.

e. $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$. ← $x = -1$ est asymptote verticale à C_f

(ok)

- Asymptote OBLIQUE

La droite (D) $y = ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$)

est une asymptote (oblique) au graphe de f

si : $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{f(x) - (ax+b)}_{} = 0}$

(l'écart entre C_f et la droite est ∞^t petit)

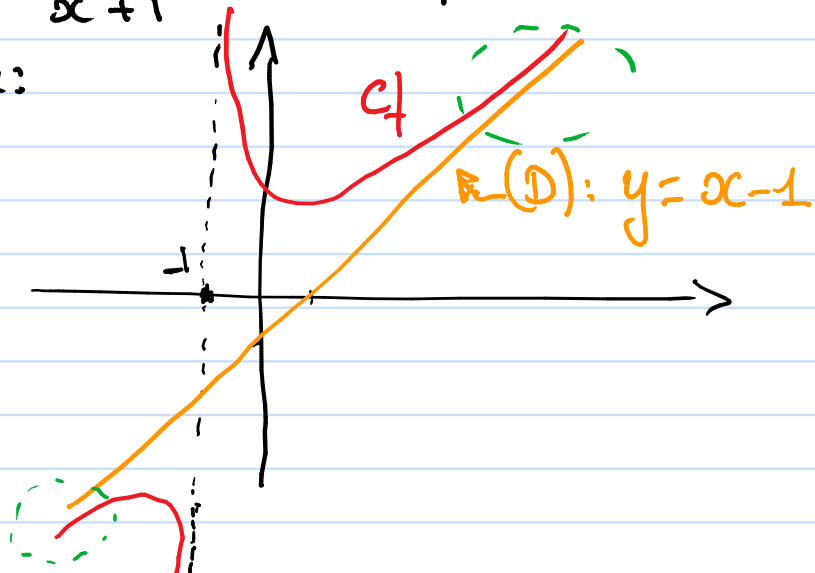
le signe donne la position relative :

De plus :

- Si $f(x) - (ax+b) > 0$, alors C_f AU DESSUS de (D)
- Si $f(x) - (ax+b) < 0$, alors C_f EN DESSOUS de (D)

Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ $(D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

a pour graphe :



On a :

$$f(x) - (x-1) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

donc la droite $\boxed{(D) : y = x - 1}$ est une asymptote (oblique) à C_f.

(vérifions cela (par le calcul).

De plus, pour $x > 0$

$$\boxed{f(x) - (x-1) > 0}$$

donc C_f est AU DESSUS de (D)

... Mais comment MONTRER que (D): $y = x - 1$ est asymptote oblique ?

Il faut calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \underline{f(x) - (x-1)}$ //

On a :

$$f(x) - (x-1) = \frac{x^2+3}{x+1} - (x-1)$$

Num $= x^2 - 1$

$$= \frac{x^2+3}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}$$

$$= \frac{(x^2+3) - (x^2-1)}{x+1}$$

donc

$$\boxed{f(x) - (x-1) = \frac{4}{x+1}}$$

On trouve : $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{-\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0 \end{array} \right\}$ donc (D) est bien as. oblique

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x - 25}{2x - 8}$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = a + \dfrac{b}{2x-8}$.

b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

Pour a, 2 façons de faire :

Méthode 1 : (Rem : $3 \times (2x) = 6x$,

en fait : $3 \times (2x - 8) = 6x - 24$ //

donc $f(x) = \dfrac{(6x - 24) - 1}{2x - 8} = \dfrac{3 \times \cancel{(2x-8)}}{\cancel{2x-8}} - \dfrac{1}{2x-8}$

$f(x) = 3 - \dfrac{1}{2x-8}$

donc $a = 3$ et $b = -1$

Méthode 2 :

On part de $a + \dfrac{b}{2x-8} = \dfrac{a(2x-8) + b}{2x-8} = \dfrac{2a \cdot x + b - 8a}{2x-8}$

il faut que ça soit égal à $f(x) = \dfrac{6x - 25}{2x-8}$

Pour cela, il faut que $2a = 6 \rightsquigarrow \boxed{a = 3}$

et $b - 8a = -25$ soit $b - 24 = -25$

soit $\boxed{b = -1}$

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x-25}{2x-8}$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = a + \dfrac{b}{2x-8}$.] Réponse : $a = 3$, $b = -1$

b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

b. Pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$: on a 1 F.I. "$\frac{\infty}{\infty}$"
donc on simplifie $f(x)$:

$$f(x) = \frac{6x-25}{2x-8} = \frac{\cancel{x}(6-25/x)}{\cancel{x}(2-8/x)}$$

$$f(x) = \frac{6-\underbrace{25/x}_{\to 0}}{2-\underbrace{8/x}_{\to 0}}$$

donc

$$\boxed{\lim_{+\infty} f(x) = \frac{6-0}{2-0} = 3}$$

de m̂ :

$$\boxed{\lim_{-\infty} f(x) = \frac{6}{2} = 3}$$

REMARQUE : Comme $f(x) = 3 - \underbrace{\dfrac{1}{2x-8}}_{\xrightarrow{x \to \pm\infty} 0}$

on a $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 3 - 0 = 3$!

MIEUX

Suite de b. : Limite à gauche/droite de 4.

$$f(x) = \frac{6x-25}{2x-8}.$$

(Rh 25)

* A gauche ($x<4$) :

Num : $\lim_{x\to 4^-} 6x-25 = -1$ NEGATIF

Dénom : $\lim_{x\to 4^-} 2x-8 = 0^-$ car $2x<8$

donc $$\boxed{\lim_{x\to 4^-} \frac{6x-25}{2x-8} = +\infty}$$

* A droite ($x>4$) . Num : idem $6x-25 \to -1$ Negatif

. Dénom : $\lim_{x\to 4^+} 2x-8 = 0^+$ car $2x>8$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 4^+} \frac{6x-25}{2x-8} = -\infty}$$

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x-25}{2x-8}$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = a + \dfrac{b}{2x-8}$.

b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

c.)

Résumé du b. • $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 3$

donc $\boxed{y=3}$ est asymptote horizontale pour C_f.

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

et $\boxed{x=4}$ est asymptote verticale pour C_f.

Exercice n° 14

Soit la fonction $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$, de domaine de définition $\mathbb{R}^*$. Déterminer l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative C_f de f, ainsi que sa position par rapport à C_f.

$$f(x) = \underbrace{1 - x}_{} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{}$$

Idée : ressemble à une équ° de droite — que chose qui $\xrightarrow{x \to +\infty} 0$

On a : $f(x) - (1-x) = -\frac{1}{x}$.

donc $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (1-x) = 0}$!

la def. d'1 asympt. oblique !

Cond : la droite $y = 1 - x$ est asymptote oblique au graphe de f

Rem : $y = -x + 1$