DAEU-B / Maths

- Lundi 23 Novembre -

CONTROLE CONTINU #1

- EN PRÉSENTIEL -

Maths : le lundi 14 DÉCEMBRE : $\boxed{17h - 19h}$.

. certificat de scolarité,
. pièce d'identité,
. emploi du temps du daeub,
. attestation : https://media.interieur.gouv.fr/deplacement-covid-19/

(salle F1 a priori)

Modalités :

- sans document,
- sans calculatrice,
- sans tel. portable [avoir une montre]

(ds les sacs, sur l'estrade)

Rappel : Note = $\begin{cases} \dfrac{CC1 + CC2 + Exam}{3} \\ \text{ou} \\ \text{Exam seul si meilleur.} \end{cases}$

Exercice n° 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux valeurs demandées (en distinguant, si besoin, les limites à gauche et à droite.

a. $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4. ✓

b. $g(x) = 5x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$ en $+\infty$, en 3 et en $-\infty$.

c. $h(x) = \left(\sqrt{x} - 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ et en 0.

d. $k(x) = (4 - x^2)(3x - 1)$ en $+\infty$, en 0 et en $-\infty$.

b. • $\lim\limits_{+\infty} g(x)$. On sait que $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 5x = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0^+ \end{cases}$

donc $\lim\limits_{+\infty} 5x - 1 + \dfrac{1}{x-3} = \boxed{+\infty}$

• $\lim\limits_{-\infty} g(x)$: on a : $\lim\limits_{-\infty} 5x = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0^-$

donc : $\lim\limits_{-\infty} 5x - 1 + \dfrac{1}{x-3} = \boxed{-\infty}$

• Pour la limite en 3, il faut distinguer :

[car qd $x \to 3$ $x-3$ tend vers 0, donc $\dfrac{1}{x-3}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de $x-3$]

$\dfrac{1}{\text{truc qui} \to 0}$ ↳ distinguer droite/gauche.

∘ A gauche : ($x < 3$ donc $x - 3 < 0$)

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ ← tend vers 0 en étant NEGATIF

$\boxed{\lim\limits_{x \to 3^-}}$ = " limite à gauche de 3 "

donc $\lim\limits_{x \to 3^-} \underbrace{5x}_{5 \times 3 = 15} \underbrace{-1}_{-1} + \underbrace{\dfrac{1}{x-3}}_{-\infty} = \boxed{-\infty}$

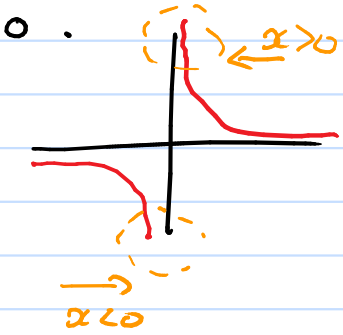
∘ A droite : ($x > 3$ donc $x - 3 > 0$) : $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ limite à droite de 3

tend vers 0 et POSITIF

donc :

$\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\underbrace{5x}_{15} \underbrace{-1}_{-1} + \underbrace{\dfrac{1}{x-3}}_{+\infty}\right) = \boxed{+\infty}$

c. $h(x) = \sqrt{x} - 1 + \boxed{\frac{1}{x}}$ qd x tend vers 0.



qd $x \to 0$, on a vu :

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\sqrt{x}}_{0} \underbrace{- 1}_{-1} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty}$$

⚠ Par contre, il n'y a PAS de limite à gauche de 0 (en 0^-)

CAR $\sqrt{x}$ n'a pas de limite en 0^-

($\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$, ça n'existe PAS)

car ici $x < 0$.

- Pour la même raison, h n'a pas de limite en $-\infty$ (à cause de $\sqrt{x}$)

- En $+\infty$: $\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \cdot \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} h(x) = +\infty}$

Exercice n° 4

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = 2 - x - x^3$.

b. $g(x) = x^4/2 - x^2/4$.

c. $h(x) = 10^{-3}x^3 - 10^6 x$.

d. $k(x) = 3x - x^3/3$.

e. $l(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

f. $u(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Exo 3 : d) $k(x) = (4-x^2)(3x-1)$ en $+\infty$, 0, et $-\infty$.

• En $+\infty$: On a : $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 4 - x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{+\infty} 3x - 1 = +\infty \end{cases}$

par produit : (règle des signes) : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} k(x) = -\infty}$

• En 0 : On a : $\lim\limits_{x \to 0} 4 - x^2 = 4$ et $\lim\limits_{x \to 0} 3x - 1 = -1$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} k(x) = 4 \times (-1) = -4}$

• En $-\infty$: On a $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} (4 - x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{-\infty} (3x - 1) = -\infty \end{cases}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = +\infty}$

Exercice n° 4

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = 2 - x - x^3$.

b. $g(x) = x^4/2 - x^2/4$.

c. $h(x) = 10^{-3}x^3 - 10^6 x$.

d. $k(x) = 3x - x^3/3$.

du m̂ genre

e. $l(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

f. $u(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Les Formes Indéterminées

a. $f(x) = 2 - x - x - x^3$.

en $+\infty$: $\lim\limits_{+\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} (-x^3) = -\infty$

par somme : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty}$

en $-\infty$: $\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} x^3 = -\infty$

(donc $\lim\limits_{-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} (-x^3) = +\infty$)

donc $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty}$

b. $g(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{4}$ en $+\infty$ (Rem : c'est la m̂ chose en $-\infty$)

On a : $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} \frac{x^4}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\infty \end{array} \right\}$ F.I. "$\infty - \infty$"

On factorise (par le "terme dominant") la + grande puissance de x

$$g(x) = x^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2} \right)$$

(Rem $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$)

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} x^4 = \pm\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \ (>0) \end{array} \right.$$

donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty}$

c. $h(x) = 10^{-3} \cdot x^3 - 10^6 \cdot x$

$x^3 \to +\infty$, $x \to +\infty$

Rem : $10^{-3} = 0{,}001$

$10^6 = 1$ million.

En $+\infty$: on a une F.I. "$\infty - \infty$"

donc factorisons :

$$h(x) = x^3 \left[10^{-3} - \frac{10^6}{x^2} \right]$$

$\frac{10^6}{x^2} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$

Or

- $\lim\limits_{+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} \left[10^{-3} - \frac{10^6}{x^2} \right] = 10^{-3} - 0 = 10^{-3}$ >0

CONSTANTE

NE TEND PAS vers 0

donc par produit,

$$\boxed{\lim_{+\infty} h(x) = +\infty}$$

e. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$ (en $+\infty$). on a : $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 3x+1 = +\infty & (-\infty) \\ \lim\limits_{+\infty} x^2-1 = +\infty & (+\infty) \end{cases}$

(en $-\infty$)

$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{F.I. "}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"}}$

m̂ Technique :

1 - factoriser en haut / bas par + gde puissance
2 - simplifier
3 - recommencer :

1. factos. $f(x) = \dfrac{\cancel{x}(3+1/x)}{x^{\cancel{2}}(1-1/x^2)}$

2. simplif $= \dfrac{1\times(3+1/x)}{x\cdot(1-1/x^2)}$

tout ça reste utilisable

$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} \left(3+\frac{1}{x}\right) = 3 \\ \lim\limits_{-\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \end{cases}$ $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^-}$

3. Recomm. Ona : $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \left(3+\frac{1}{x}\right) = 3+0 = 3 \text{ POSITIF} \\ \lim\limits_{+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{(1-1/x^2)}_{0/=1} = +\infty \end{cases}$

donc, par quotient.

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0^+}$

f. $u(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$

(les F.I. "$\dfrac{\infty}{\infty}$")

On a : $u(x) = \dfrac{\cancel{x}(3+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1-1/x}$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3+0 = 3 \\ \lim\limits_{+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1-0 = 1 \end{cases}$ donc par quotient,

$$\boxed{\lim_{+\infty} u(x) = \frac{3}{1} = 3} = \lim_{-\infty} u(x)$$

idem qd $x \to -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 3+\frac{1}{x} = 3 \\ \lim\limits_{-\infty} 1-\frac{1}{x} = 1 \end{cases}$