DAEU-B / Maths

- Lundi 23 Novembre -

(Retour au cours sur le calcul de limite)

Ce qui reste à voir sur les limites :

calcul
- technique pour gérer les F.I ('quantité conjuguée')
- limite de fonction composée
- Comparaison de limites.

- Notion d'Asymptote (interpréter les limites au niveau du graphe : facile)

* Encore des exemples de F.I. (par des exemples)

▶ $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{4x^2+x} - x$. On a $\sqrt{4x^2+x} \xrightarrow{+\infty} +\infty$

GRAND

↳ $\boxed{\text{F.I. } "\infty - \infty"}$

Là, factoriser marche presque toujours :

$$\sqrt{4x^2+x} = \sqrt{x^2(4+1/x)} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{4+1/x}$$

terme dominant

on factorise

$\sqrt{x^2} = x$ (Note : $x>0$)

donc :

$$\sqrt{4x^2+x} - x = x.\sqrt{4+1/x} - x$$

$$= x\left(\sqrt{4+1/x} - 1\right)$$

$+\infty$ $\qquad$ 1

Or $\lim\limits_{+\infty} \left(\sqrt{4+\frac{1}{x}} - 1\right) = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$

$\frac{1}{x} \to 0$

Concl : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \sqrt{4x^2+x} - x = +\infty}$

Mais Parfois "factoriser" ne marche PAS :

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to +\infty} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\lim_{+\infty} f(x) ?}$$

$\boxed{\text{F.I. "}\infty - \infty\text{"}}$

Si on factorise, comme dans l'ex. d'avant ;

$$\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2(1+1/x)} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{x}} = x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

donc $f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x = \underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right]}_{\to \sqrt{1+0}-1 = 0 \,!}$

PROBLÈME : factoriser nous mène à la F.I. "$\infty \times 0$"

... il faut tenter autre chose !

On va réécrire $\boxed{f(x) = \sqrt{x^2+x} - x}$

en "Multipliant par la "Quantité Conjuguée" ":

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}$$

← de la forme $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$!

3° Id. Rem.

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

... qui se simplifie :

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}}$$

Ex (7c)

$\lim\limits_{+\infty}$ de $g(x)$ où

$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

là, on peut factoriser !

$$f(x) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right]}$$

Rem : $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ (diapo précédente)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{1/x}_{\to 0}} + 1} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

CONCLUSION : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{Ex 7c}}$: $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\boxed{\lim_{+\infty} g(x) ?}$ c'est un F.I. "$\infty - \infty$"

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \underset{3^\circ \text{ Id. Rem.}}{=} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

quantité conjuguée

donc

$$g(x) = \frac{\cancel{x}+1 - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}$$

Or

$$\lim_{+\infty} \underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty} = +\infty$$ donc

$$\boxed{\lim_{+\infty} g(x) = 0}$$

Un dernier exemple d'utilisation de la quantité conjuguée

. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$ quand $x \longrightarrow -3$

$\boxed{\text{F.I. } \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}$

Num : $\sqrt{x+7}-2 \xrightarrow{x \to -3} \sqrt{4}-2 = 0$

Denom : $x+3 \longrightarrow 0$

Mais

$$h(x) = \frac{(\sqrt{x+7}-2)(\sqrt{x+7}+2)}{(x+3)\times(\sqrt{x+7}+2)}$$

quantité conj.

$$= \frac{(\sqrt{x+7})^2 - 2^2}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$$

3° Id. Rem.

au num : $(x+7-4 = x+3)$

$$= \frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(\sqrt{x+7}+2)}$$

Soit : $\boxed{h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+2}}$

Or $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x+7}+2 = +\infty$

donc

$$\boxed{\lim_{+\infty} h(x) = 0}$$

* Limite de Fonctions Composées :

... on l'a fait implicitement, car c'est INTUITIF !

Ex : $\lim\limits_{+\infty} \underbrace{\sqrt{x+7}} = +\infty$, car :

- Composée $u(v(x))$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x+7. \end{cases}$

Or : $\lim\limits_{+\infty} x+7 = +\infty$

et $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

En général :

α = réel ou $\pm\infty$

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = b$ (un nb ou $\pm\infty$)

et $\lim\limits_{x \to b} u(x) = c$ (un nb ou $\pm\infty$)

Alors $\boxed{\lim\limits_{x \to \alpha} u(v(x)) = c}$

Ex : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2-3}$?

Composée $u(v(x))$ avec $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^2-3 \end{cases}$

On sait que

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2-3 = +\infty$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2-3} = 0$

* COMPARAISON DE LIMITE (là encore, très intuitif)

Il y a 3 règles :

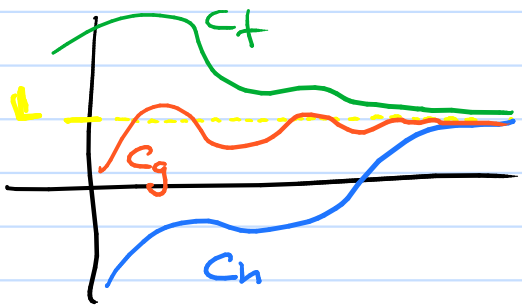
① THEORÈME DES - ARMES

Si on a 3 fct $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$

et si $\lim\limits_{x \to \alpha} (x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = L$ (un nombre)

Alors

$$\boxed{\lim_{x \to \alpha} g(x) = L}$$



Exemple classique

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\lim_{+\infty} g(x) \ ?}$

Vu : $\lim_{+\infty} \sin x$ N'EXISTE PAS

Truc : $\sin x$ (comme $\cos x$) satisfait toujours :

$$1 \geq \sin x \geq -1$$

donc

Rem (on divise par $x > 0$ car limite en $+\infty$)

$$\boxed{\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq -\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x} \geq g(x) \geq -\frac{1}{x}$$

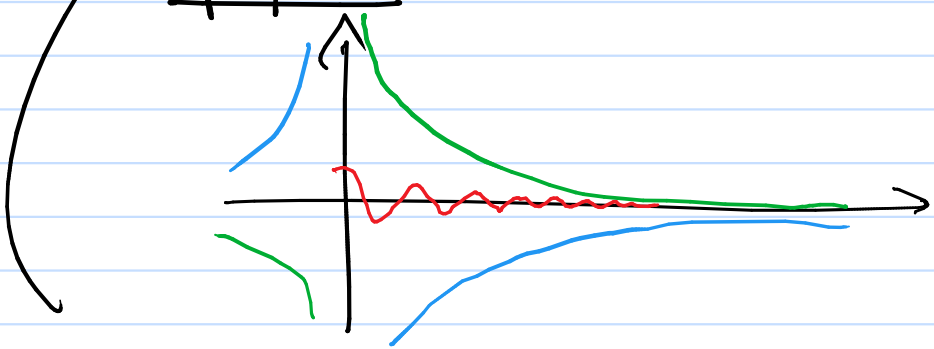
Or

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{+\infty} g(x) = 0}$$

Graphique ! :



Exercice n° 9

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^3$; ← composée

car c'est la composée de $\left(2-\frac{1}{x}\right)$ par x^3

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$; ← quantité conj. + tard

mais, se fait "directement"

~~**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x$;~~ (difficile)

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x-1}{x}$.

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}$. ← Gendarmes

a.) On a $\lim\limits_{+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2-0 = 2$

donc $\lim\limits_{+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}$

$$\boxed{\lim_{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x} \ ?}$$

On sait : pour tout x : $1 \geq \cos x \geq -1$

opérations sur les inégalités

soustrait 1 $\hookrightarrow$ $0 \geq \cos x - 1 \geq -2$

divisé par x $(x>0)$ $\hookrightarrow$ $\boxed{0 \geq \frac{\cos x - 1}{x} \geq \frac{-2}{x}}$

Or $\lim_{+\infty} \frac{-2}{x} = 0$

0 $\qquad$ 0

donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$

Pour demain : $\boxed{\lim_{+\infty} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}}$