DAEU-B / Maths

- Mardi 17 Novembre -

[Exercices de Modélisation]

Exercice n° 4 (Arche de pont)

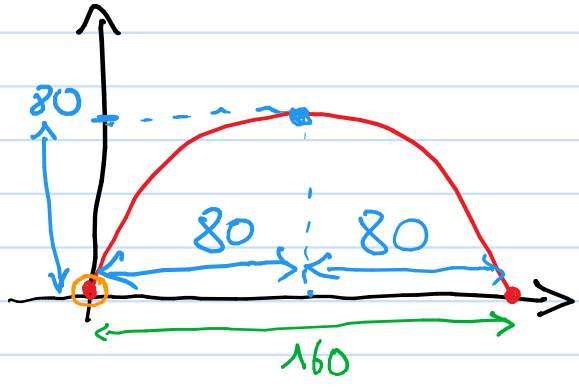
L'arche d'un pont a la forme d'une parabole s'appuyant sur deux points au sol distants de 160 mètres. Le sommet de la parabole est à une hauteur de 80 mètres. Déterminer la hauteur de l'arche à 16 mètres du bord.

$\Rightarrow$ la hauteur du pont est décrite par une fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a < 0 \end{cases}$$

but : trouver a, b, c

Fixons les choses



Premier pied à l'origine :

$f(0) = 0$ donc $\boxed{c = 0}$

Second pied à 160 m :

$f(160) = 0$ donc

$$f(160) = a \times 160^2 + b \times 160 = 0$$

lien entre a et b $\left\{ \text{div. } 160 \right.$ $a \cdot 160 + b = 0$

donc $\boxed{b = -a \times 160}$

À ce stade :

$$f(x) = a x^2 - a \times 160 \times x$$

Rem : avec le tableau de variations :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ a tableau
$(a<0)$

x	0		$-b/2a$		160
f	0	$\nearrow$	80	$\searrow$	0

nous dit : $-b/2a = \frac{160}{2} = 80$

$\Leftrightarrow b = -80 \times 2a$

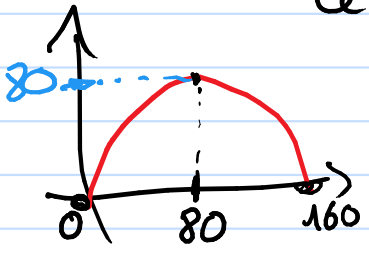
$$\boxed{b = -160a}$$

$$f(x) = a.x^2 - a.160.x \quad]]$$

De plus : maximum vaut 80 m.

ce max est atteint au milieu du pont :

pour $x = 160/2 = 80$



on a donc : $\boxed{f(80) = 80}$

ça donne : $a \times 80^2 - a \times 160 \times 80 = 80$

(div. par 80)

$\Longleftrightarrow \quad a \times 80 - a \times 160 = 1$

$\Longleftrightarrow \quad a(80 - 160) = 1$

$\Longleftrightarrow \quad \boxed{a = -1/80}$ ← Rem : on trouve bien $a < 0$

donc $b = -160 \times a = -160 \times (-1/80)$

soit $\boxed{b = 2}$

Concl : $\left[f(x) = -1/80 \times x^2 + 2x \right]$

? hauteur à 16 m du premier pied ?

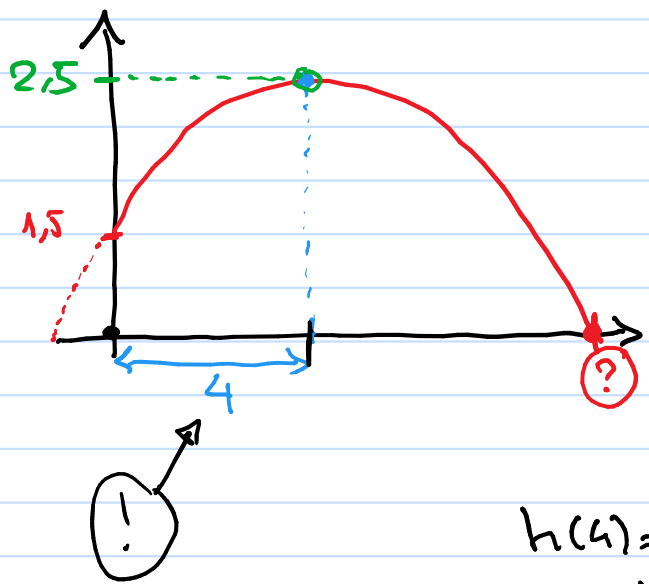
↳ $h(16) = -1/80 \times 16^2 + 2 \times 16 \simeq \boxed{28{,}8 \text{ m}}$

Exercice n° 6 (Longueur d'un lancer)

Une personne lance une balle d'une hauteur de 1,50 mètre. La balle suit une trajectoire parabolique dont le sommet est atteint 4 mètres plus loin avec une hauteur de 2,50 mètres. Déterminer avec une précision au mm près un encadrement de la distance parcourue par la balle lorsqu'elle retombe au sol.

A nouveau, la hauteur est donnée par 1 fonction :

$$\boxed{h(x) = ax^2 + bx + c} \quad (a<0)$$



On sait que :

① $h(0) = 1,5 \Rightarrow \boxed{c = 1,5}$

② max atteint pour $x = -b/2a = 4$.

$\Rightarrow \boxed{b = -8a}$

③ $h(4) = 2,5$ donc $(a<0)$

$h(4) = a \times 4^2 - 8a \times 4 + 1,5 = 2,5$

$\Leftrightarrow a(16-32) = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{1}{16}}$

donc $b = -8 \times (-1/16)$

$\boxed{b = 1/2}$

Cond : $\boxed{h(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.}$

? à quelle distance la balle touche-t-elle le sol ?

On doit résoudre $\boxed{h(x) = 0}$ équation

$$-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{-1}{16}\right) \times \frac{3}{2} = \dots = \frac{5}{8} \quad (>0)$$

2 solutions :

la solution POSITIVE

$$\boxed{x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}}}{-2/16}} \quad \text{et} \quad \underbrace{x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{8}}}{-2/16}}_{\text{NEGATIF}}$$

(on cherche une distance)

Calcul :

$$\boxed{x_1 \simeq 10{,}325 \text{ m}}$$