DAEU-B / Maths

Lundi 16 Novembre

(suite)

Exercice n° 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux valeurs demandées (en distinguant, si besoin, les limites à gauche et à droite.

a. $\boxed{f(x) = \dfrac{4x}{4-x}}$ en 0 et en 4.

c'est V.I. ~~ds~~ distinguer gauche / droite.

pas de pb (0 pas V.I)

Exercice 1

d. Limites à gauche et à droite d'un point.

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2x-4}$

(b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2x-4}$

(c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$

(d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

en premier, puis gà.

Exercice n° 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux valeurs demandées (en distinguant, si besoin, les limites à gauche et à droite.

a. $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4.

* Limite en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{4-x} = \dfrac{4 \times 0}{4-0} = \dfrac{0}{4} = \boxed{0}$.

* Pour la limite en 4, on distingue limite à gauche/droite :

V.I.

→ à droite de 4 : $x > 4$

donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^+} 4x = 16 & \text{numérateur} \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \underbrace{4-x}_{4-(\text{un nb + grand que } 4)} = 0^- & \text{dénom.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{\overset{16 \text{ (positif)}}{4x}}{\underset{0^- \text{ (négatif)}}{4-x}} = -\infty$$

→ à gauche de 4 : $x < 4$

. numérateur.

$\lim\limits_{x \to 4^-} 4x = 16$ (positif)

. dénominateur

$\lim\limits_{x \to 4^-} \underbrace{4-x}_{4-(\text{nb plus petit que } 4)} = 0^+$ positif.

donc

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{\overset{16}{4x}}{\underset{0^+}{4-x}} = +\infty$$

clair : $\lim\limits_{x \to 4} 4-x = 0$ ← (très petit)

MAIS on a besoin de savoir : positif ou négatif ?

↳ $\begin{cases} \text{si } x > 4, & 4-x \text{ Négatif} \\ \text{si } x < 4, & 4-x \text{ Positif.} \end{cases}$

d. Limites à gauche et à droite d'un point.

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2x-4} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2x-4} = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(a). Limite à DROITE de 2 : $x \to 2$ avec $x > 2$.

Puisque $x > 2$, alors $2x - 4 > 0$.

donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x - 4 = 0^+$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2x-4} = +\infty}$

très petit et POSITIF (0^+)

(b). Limite à gauche de 2 : $x < 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2x-4} = ?$$

Cette fois,

quand $x \to 2$ avec $x < 2$, $2x-4$ est proche de 0 et négatif

c-à-d : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x - 4 = 0^-$

donc

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2x-4} = -\infty$$

proche de 0 et négatif

d. Limites à gauche et à droite d'un point.

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2x-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2x-4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(Rem : quelque soit le signe du nombre a, $a^4 \geq 0$ POSITIF)

→ lim à droite de 2 :

Vu. $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-4 = 0^+$ donc : $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4) = 0^+$

signifie 'se rapproche de 0 en étant POSITIF'

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(2x-4)^4} = +\infty}$

→ lim à gauche de 2 :

Vu : $\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-4 = 0^-$, mais $\lim\limits_{x\to 2^-} (2x-4)^4 = 0^+$

donc de même :

$$\boxed{\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(2x-4)^4} = +\infty}$$

Résumons :

- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2x-4} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2x-4} = -\infty$

les limites à gauche/droite sont $\neq$

et

- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(2x-4)^4} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(2x-4)^4} = +\infty$

lim à gauche = lim à droite

Conclusion :

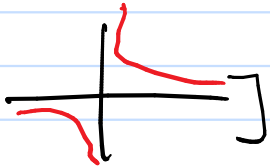
- $\dfrac{1}{2x-4}$ n'a PAS de limite en 2 (car gauche $\neq$ droite)
- $\dfrac{1}{(2x-4)^4}$ a une limite en 2 : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(2x-4)^4} = +\infty$ (car gauche = droite)

PROPRIÉTÉ : Soit f fonction et $a \in \mathbb{R}$.

→ Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$,

alors f n'admet PAS de limite en a.

[Ex : $f(x) = 1/x$ n'admet pas de lim. en 0 :

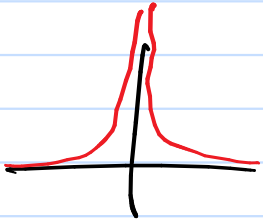

]

→ Sinon, alors f admet une limite en a,

et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} -(x)$.

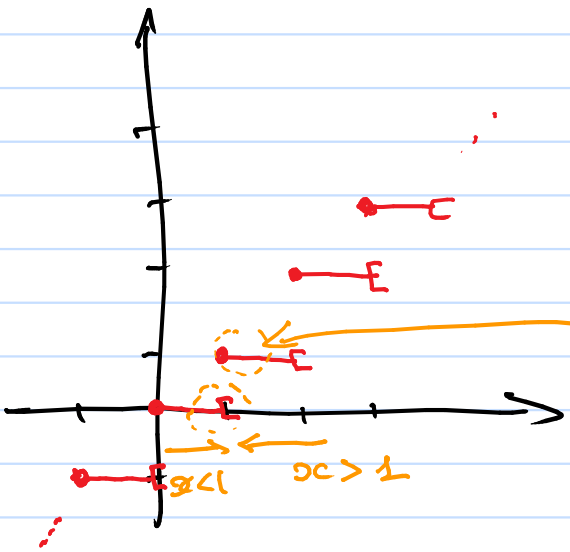
[Ex : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ a une limite en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Un autre exemple de référence :

$E(x)$, partie entière.



par exemple, n'a PAS de limite en 1 :

En effet :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} E(x) = 1 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0 \end{array}\right\} \neq$$

$E(0,\ldots) = 0$

(idem pour $x = 2, 3 \ldots$ ou $0, -1, -2 \ldots$)

Exercice : (retour à des calculs de limite)

(4). a. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1}$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

3 limites à calculer)

b. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{2x+1}{\left(\frac{1}{x}-2\right)}$, pour $\alpha = +\infty$ et $-\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1/x}{2/\sqrt{x}}$, pour $\alpha = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\frac{1}{x}-2}{\frac{-3}{\sqrt{x}}}$, pour $\alpha = +\infty$.

e. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{2x^2+3x+4}{3x^2+5}$, pour $\alpha = 0$ et $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\left(\frac{1}{x} - 2\right)}{2x+1}$; pour $\alpha = 2$, $\alpha = +\infty$, $\alpha = -\infty$ $\quad f(x)$

→ lim. en 2 : $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} - 2\right) = \frac{1}{2} - 2 = -3/2 \\ \bullet \lim\limits_{x \to 2} 2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{-3/2}{5} = \boxed{-3/10}$.

→ lim. en $+\infty$ $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{+\infty} 1/x - 2 = 0 - 2 = -2 \text{ NEGATIF} \\ \bullet \lim\limits_{+\infty} 2x + 1 = +\infty \text{ POSITIF} \end{cases}$

donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0^{-}$

→ lim. en $-\infty$ $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{-\infty} (1/x - 2) = 0 - 2 = -2 \text{ Negatif} \\ \bullet \lim\limits_{-\infty} (2x+1) = -\infty \text{ negatif} \end{cases}$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^{+}$

b. • $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x+1}{1/x-2}$?

$2x+1 \to +\infty$, $1/x-2 \to -2$

Vu : • $\lim\limits_{+\infty} 2x+1 = +\infty$ (positif)

• $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x}-2 = -2$ (négatif)

donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x+1}{1/x-2} = -\infty}$

• $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{2x+1}{1/x-2}$?

Vu : $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{-\infty} 2x+1 = -\infty & \text{(négatif)} \\ \bullet \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{x}-2 = -2 & \text{(nég.)} \end{cases}$

donc $\boxed{\lim\limits_{-\infty} \dfrac{2x+1}{1/x-2} = +\infty}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{2/\sqrt{x}}$?

numérateur très petit

- Numérateur : $\lim\limits_{+\infty} 1/x = 0^+$

diviser par cela donne des nbs très grands.

- Dénom. : $\lim\limits_{+\infty} 2/\sqrt{x} = 0^+$

donc : $\dfrac{1/x \to 0^+}{2/\sqrt{x} \to 0^+} \longrightarrow ?$

les comportements des numérateurs et dénominateurs sont "contradictoires"

DEMAIN

on verra que c'est une FORME INDÉTERMINÉE (de type $\frac{0}{0}$)