DAEU-B / Maths

Mardi 1er Décembre

Exercice n° 12

On considère la fonction fraction rationnelle

$$Q(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}.$$

$D_Q = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a. Montrer que $\frac{Q(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $\pm\infty$.

b. Calculer $Q(x) - x$ et chercher sa limite (si elle existe) quand $\boxed{x \to \pm\infty.}$

c. En déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote au graphe de Q.

d. Calculer $Q(x) - (x+1)$ et étudier son signe.

a. $$\frac{Q(x)}{x} = \frac{x^2+2x-3}{x\times(x+1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x}$$

limite en $\pm\infty$? ⇝ F.I. "$\frac{\infty}{\infty}$"

Mais : $$\frac{Q(x)}{x} = \frac{\cancel{x^2}(1+2/x-3/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x)}$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{\pm\infty} 1+2/x-3/x^2 = 1+0-0 = 1 \\ \lim\limits_{\pm\infty} 1+1/x = 1+0 = 1 \end{cases}$

donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\pm\infty} \frac{Q(x)}{x} = \frac{1}{1} = 1}$

b. $$Q(x) - x = \frac{x^2+2x-3}{x+1} - x = \frac{x^2+2x-3}{x+1} - \underbrace{\frac{x(x+1)}{x+1}}_{= \frac{x^2+x}{x+1}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+2x-3-(\cancel{x^2}+x)}{x+1}$$

$$Q(x) - x = \frac{x-3}{x+1}$$

On a : $$\frac{x-3}{x+1} = \frac{\cancel{x}(1-3/x)}{\cancel{x}(1+1/x)}$$ $3/x \to 0$, $1/x \to 0$ qd $x \to \pm\infty$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) - x = 1}$

On considère la fonction fraction rationnelle (une fraction de 2 polynômes)

$$Q(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}.$$

$Q(x) - x \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1.$

a. Montrer que $\frac{Q(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $\pm\infty$.

b. Calculer $Q(x) - x$ et chercher sa limite (si elle existe) quand $x \to \pm\infty$.

c. En déduire que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote au graphe de Q.

d. Calculer $Q(x) - (x+1)$ et étudier son signe.

c. d'après la question b., $\lim\limits_{\pm\infty} \underbrace{Q(x) - x}_{\to 1} - 1 = 1 - 1 = 0$

Or $\lim\limits_{\pm\infty} Q(x) - (x+1) = 0$ signifie que $y = x+1$ est asymptote (oblique) à C_Q.

d. signe de

[pour connaître la posit° de C_Q par rapport à la droite $y = x+1$.]

$$Q(x) - (x+1) = \frac{x^2+2x-3}{x+1} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)} = \frac{x^2+2x-3-(x+1)^2}{x+1}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}-3-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-1}{x+1}$$

donc

$$\boxed{Q(x) - (x+1) = \frac{-4}{x+1}}$$

NEGATIF

Positif si $x > -1$
Négatif si $x < -1$

- Pour $x > -1$: $Q(x) - (x+1)$ NEGATIF
  donc C_Q est EN DESSOUS de $y = x+1$

- Pour $x < -1$: $Q(x) - (x+1)$ POSITIF
  donc C_Q est AU DESSUS de $y = x+1$.