DAEU-B / Maths

Mardi 1er Décembre

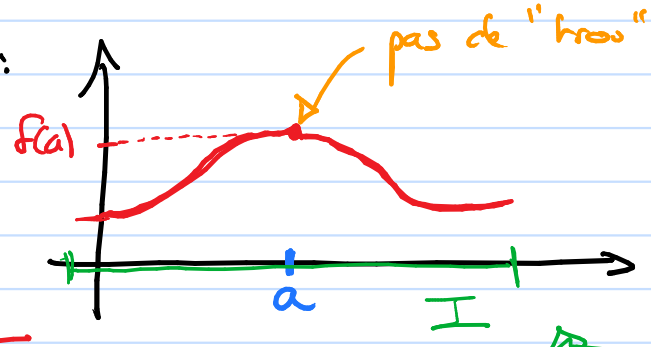
- suite du cours sur la continuité -

Rappel : Notion de Continuité

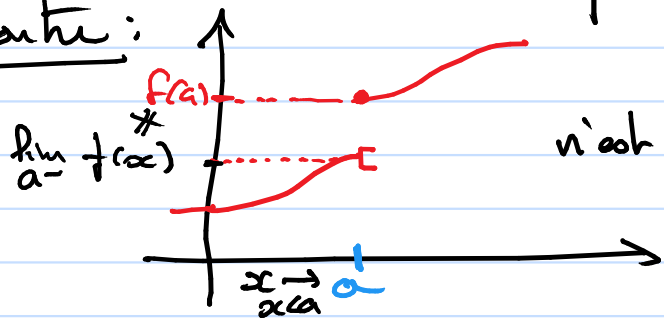
Déf : f une fonction et $a \in D_f$.

f est CONTINUE EN a si : $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$

c'est à dire, graphiquement :



Par contre :



n'est pas continue en a.

* On dit que f est CONTINUE sur l'intervalle I, si f est continue en toutes les valeurs de I.

Exercice n° 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -3x+5, & \text{si } x > 3. \\ k & \text{si } x \leq 3. \end{cases}$

morceau de droite oblique

un paramètre bout de droite

Déterminer la valeur k pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

le problème est de savoir si f est continue en 3.

Rem : . pour $x > 3$,

$f(x) = -3x+5$ continue

. pour $x < 3$, $f(x) = k$ constante, donc continue

donc la seule question est : f est-elle continue en 3, c-à-d, a-t-on

$$\underbrace{\lim_{x \to 3} f(x)}_{\text{à calculer}} = \underbrace{f(3)}_{\boxed{f(3) = k}} ?$$

Pour cela, il faut calculer à gauche et droite de 3 :

- A droite ($x > 3$) : $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{3^+} -3x+5$
$= -3 \times 3 + 5$
$= -9 + 5$
$= -4$

- A gauche ($x < 3$) : $\lim_{3^-} f(x) = \lim_{3^-} k$
$= k$

doivent être $=$

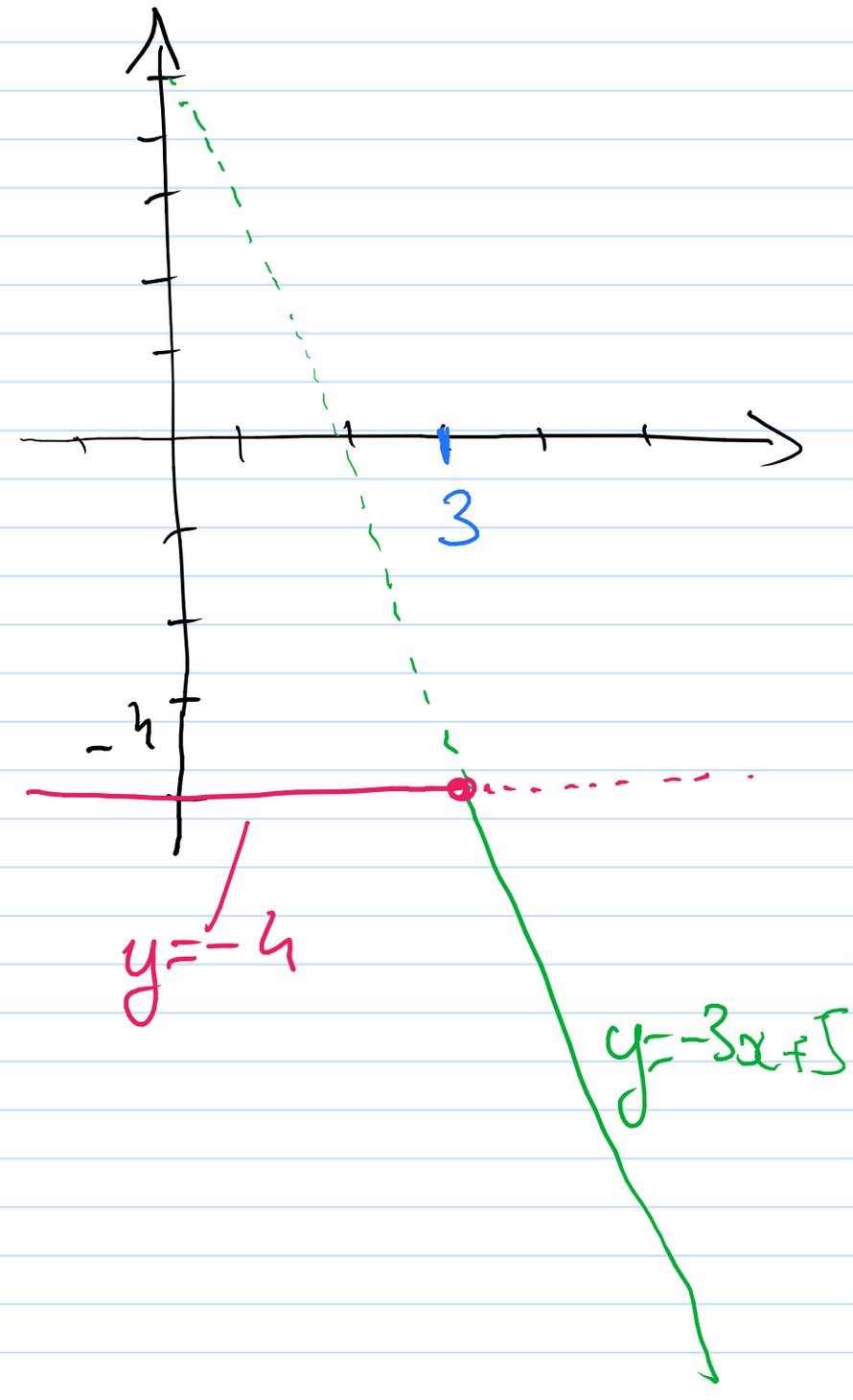
Pour que $\lim_{3^+} f(x) = \lim_{3^-} f(x)$, il faut donc que

$$\boxed{k = -4}$$

Dans ce cas, on a : $\lim_{3} f(x) = -4 = f(3)$

et f est continue.

Graphiquement :



Suite du Cours : 2 conséquences.

II) Théorème des Valeurs Intermédiaire.

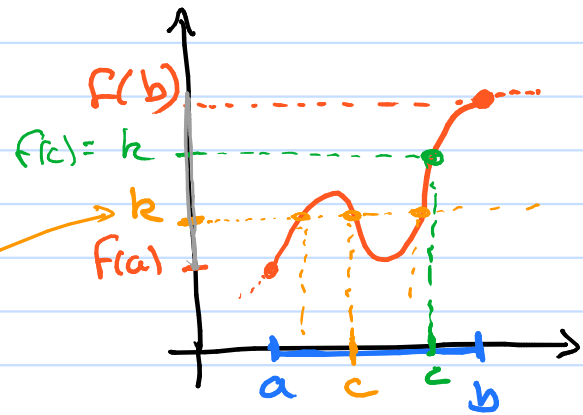
Soit f fonction.

Si f est CONTINUE sur $[a,b]$

alors, pour toute valeur k entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe toujours au moins un réel $c \in [a,b]$ tq

$$\boxed{f(c) = k}$$



Autrement dit,

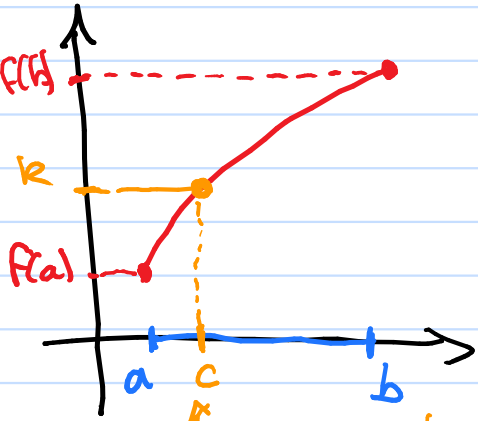
. k (entre $f(a)$ et $f(b)$) a toujours au moins un ANTECEDENT

(l'équation $f(x) = k$ a tjs au moins une solution)

Version + forte : Si la fonction f est

- CONTINUE sur $[a;b]$
- STRICTEMENT MONOTONE sur $[a;b]$

croissante ou décroissante



alors, pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

a exactement UNE solution

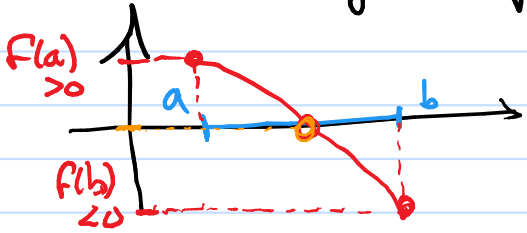
(càd k a un unique antécédent).

l'antécédent de k. $f(c) = k$.

<u>Rem</u> (un cas particulier)

si $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes différents il existe une unique solut° à l'équation $\boxed{f(x) = 0}$

$(k = 0)$



Exo 4 : Démontrer que l'équation

$$x^3 + 3x = 5$$

a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Pour cela, on considère $f(x) = x^3 + 3x$.

strict sur $\mathbb{R}$

idem

f est
- CONTINUE sur $\mathbb{R}$ (fonction de ref.)
- STRICTEMENT croissante sur $\mathbb{R}$.

marche encore avec $[a;b] = \mathbb{R}$

donc le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que $f(x) = 5$ a une unique solut°

car
- $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

on atteint toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$!

* suite et précision sur l'Exo 4 : $f(x) = x^3 + 3x$.

On peut être plus précis sur la valeur de cette sol :

si on prend $a = -1$ et $b = 3$

on a : $\begin{cases} \bullet\ f(a) = f(-1) = -4 \\ \bullet\ f(b) = f(3) = 36 \end{cases}$ 5 est entre -4 et 36

et f continue et strictement $\nearrow$ sur $[a, b]$

et le thm des V.I. dit que : il existe une unique valeur $\boxed{c \text{ entre } -1 \text{ et } 3}$ telle que : $f(c) = 5$.

⚠ On ne connaît PAS la valeur de c ! par ce théorème

Exercice n° 6

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

outil : le thm des Valeurs Intermed. (T.V.I.)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

① str. décroiss. ② strict. croissante.

Quel est le nombre de solutions de l'équation $\boxed{f(x) = 1}$?

combien de valeurs k tq : $f(k) = 1$?

(!) on ne cherche pas leur valeur.

On regarde d'abord sur ① : sur $]-\infty;0]$, f est
- continue
- strict. décroissante.

① de plus, $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $f(0) = -3$ } 1 est bien compris entre -3 et $+\infty$

donc d'après le TVI, ← tjs vérifier les hypothèses pour utiliser ce thm

Il y a une seule solut° à $f(x) = 1$ dans $]-\infty;0]$.

Par contre :

② sur $[0,+\infty[$, f est continue et strict° croissante, mais puisque $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ (< 1)

on a $f(x) < 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[$

donc pas de solution à $f(x) = 1$ dans $[0,+\infty[$

III Notion de "FONCTION RECIPROQUE"

Idée : la réciproque d'une fonction f
= une autre fonction, notée f^{-1},
qui "déconstruit ce que construit f"

Ex : la racine carrée "déconstruit" la fonction carrée :

$$2 \xmapsto{\text{carré}} 2^2 = 4 \xmapsto{\text{racine}} \sqrt{4} = 2$$

on retrouve le nb de départ.

Pour préciser cela,
revenons au T.V.I :

TVI : Si f continue et strictement monotone sur $[a,b]$, alors, pour toute valeur k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a,b]$ tq $f(c) = k$.

Ls la fonction qui, à k entre $f(a)$ et $f(b)$, associe cet unique $c \in [a,b]$ est LA FONCTION RÉCIPROQUE de f, notée f^{-1}

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, bend left, "f"] & k \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$f(c) = k$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{-1}(k) = c$$

Retour à l'ex. de carré / racine carrée :

La fonct° carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘		↗

strictement croissante sur $[0,+\infty[$

donc

$$f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2$$

est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

f continue & strict° monotone.

TVI (pour tout $k \in [0,+\infty[$, il existe un unique $c \in [0,+\infty[$ tq : $\boxed{c^2 = k}$ ← $\boxed{f(c) = k}$

En gen.

... ce nombre $c > 0$ dont le carré vaut k, c'est la RACINE CARRÉE de k : $\boxed{c = \sqrt{k}}$ ← $\boxed{c = f^{-1}(k)}$

f^{-1} = réciproque de f.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{\sqrt{x^2} = x \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})^2 = x}$$

$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$ et $\boxed{f(f^{-1}(x)) = x}$

f^{-1} "déconstruit" f

Autre exemple :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

est
- continue
- strictement croissante

sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{DONC}}$ elle a une fonction réciproque : $\underbrace{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}}$

racine cubique !

En effet :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$$

$2^3 = 8$ et $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{2^3} = 2$

... et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\sqrt[3]{x^3} = x}$

et de m̂ $\boxed{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\text{cube}"] & x^3 \arrow[l, bend left, "\text{racinie cubique}"] \end{tikzcd}$$

Troisième Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = -2x+1$

est
- continue
- strictement décroissante

sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE :

m̂ chose avec

$f(x) = 3x - \frac{2}{3}$.

Donc

f admet une fonct° Réciproque : f^{-1}.

? Quelle est la formule de f^{-1} ?

Pour trouver la formule de f^{-1}, on part du fait que :

$$f(c) = k \Leftrightarrow f^{-1}(k) = c$$

formule où est c isolé.

Ici :

on part d'une formule où k est isolé

$$-2c+1 = k \Leftrightarrow -2c = k-1$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}$$

$c = f^{-1}(k)$ donc

$$\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

Ex : $f(x) = 3x - 2/3$

est continue et strictement CROISSANTE sur $\mathbb{R}$,
donc f admet une fonct° réciproque f^{-1}.

Calcul de f^{-1} : On part de $f(c) = k$
et on essaye d'ISOLER "c" :

$$f(c) = k \Leftrightarrow 3c - 2/3 = k.$$

$$\Leftrightarrow 3c = k + 2/3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{3}k + \frac{2}{9}} \Leftrightarrow c = f^{-1}(k)$$

donc

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}}$$

En résumé : Si f est
- continue
- strictement monotone

alors elle a une réciproque f^{-1}.

qui "défait" f :
$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = x \\ f(f^{-1}(x)) = x \end{cases}$$

Graphiquement, cela se traduit par 1 SYMETRIE :

le graphe de f et celui de f^{-1} sont SYMETRIQUES / droite $y=x$.

x^2 $\quad y=x$

$\sqrt{x}$

⚠ la fonct° $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ n'a pas de réciproque sur $\mathbb{R}$ car

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘		↗

fon° carrée sur $[0,+\infty[$