

DAEU-B / Maths

Lundi 2 Novembre

(cours)

**Rappels** : ce qu'on a vu sur les fonctions.

1) Notion de fonction  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$   
ens. de définition  $x \mapsto y = f(x)$   
l'image de  $x$   
( $x$  est un antécédent de  $y$ )

2) Graph de  $f$ .

3) Monotonie : fonction (strictement) croissante sur  $I$   
décroissante

4) Extrema : maximum / minimum sur  $I$ .

5) Paire : fon  
ou impaire  $\leftarrow f(-x) = f(x)$  pour tout  $x$ .  
 $\leftarrow f(-x) = -f(x)$ .

## \* FONCTION COMPOSÉE

← un procédé pour "combiner" deux fonctions (et en construire une nouvelle).

Ex :

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Cette fonction est construite en 2 "étapes" :



Si on pose  $\begin{cases} u(x) = x-1 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

alors

$$f(x) = \sqrt{x-1} = \sqrt{u(x)} = v(u(x))$$

On dit que  $f$  est la COMPOSÉE de  $u$  par  $v$ .

Ex 2:  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ .

se décompose en :

$$x \xrightarrow{u} x^2 + 1 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{x^2+1}) \quad \boxed{II}$$

avec  $\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 \\ \mathfrak{F}(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

↳  $g$  est la composée de  $u$  par  $\mathfrak{F}$   
(on met  $u$  "à l'intérieur" de  $\mathfrak{F}$ )

NOTATION:  $g = \underline{\mathfrak{F} \circ u}$  (car  $g(x) = \underline{\mathfrak{F}}(\underline{u(x)})$  !)

Composer deux fonctions :

Soit  $\underline{u}(x) = \sqrt{x}$  et  $\underline{v}(x) = 2\underline{x} + 3$ .

→ Composée de  $u$  par  $v$ : u "dans" v

$$v \circ u(x) = v(\underline{u}(x)) = v(\sqrt{x}) = \boxed{2 \times \sqrt{x} + 3}$$

→ Composée de  $v$  par  $u$ : v "dans" u

$$u \circ v(x) = u(v(x)) = u(2x+3) = \boxed{\sqrt{2x+3}}$$

Rem: l'ordre est important:  $u \circ v \neq v \circ u$   
en général !

## Exercice n° 18

Soient les fonctions

$$\underline{u(x)} = x^2 - 3x - 4 \quad , \quad \underline{v(x)} = \frac{1}{x}$$

Donner les formules des fonctions composées

$$u \circ v, \quad v \circ u$$

puis donner leurs ensembles de définition respectifs.

====

Exercice : Décomposer (écrire comme composée de DEUX )  
fonctions :  $v \circ u$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} ; \quad (x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

$$\underline{\text{Ex: }} \sqrt{x} = \textcircled{x+1} \quad \text{et} \quad \textcircled{u(x)} = \sqrt{x}$$

$$\hookrightarrow \textcircled{\sqrt{\circ u(x)}} = \sqrt{\textcircled{u(x)}} \\ \text{à l'intérieur.}$$

$$= \textcircled{u(x)} + 1$$

$$= \sqrt{x} + 1$$

$$\underline{\text{Ex: }} \textcircled{a(x)} = \textcircled{3x^2 + 4x - 3} \quad \text{et} \quad \textcircled{b(x)} = \sqrt{x}$$

$$a \circ b(x) = a(\textcircled{b(x)})$$

$$= 3 \cdot \textcircled{(\sqrt{x})^2} + 4 \cdot \textcircled{\sqrt{x}} - 3$$

$$= 3x + 4\sqrt{x} - 3.$$

## Exercice n° 18

Soient les fonctions

$$u(x) = x^2 - 3x - 4 \quad , \quad v(x) = \frac{1}{x}$$

Donner les formules des fonctions composées

$$\boxed{u \circ v, \quad v \circ u,}$$

puis donner leurs ensembles de définition respectifs.

$\star u \circ v \leftarrow v$  "à l'intérieur" de  $u$ :  $u(x) = x^2 - 3x - 4$

$$u(v(x)) = \sqrt{x}^2 - 3\sqrt{x} - 4$$

donc:  $u \circ v(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} - 4$

Soit :  $u \circ v(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 \quad //$

Valeur Interdite :  $x = 0 \Rightarrow D_{u \circ v} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
( $x$  note aussi  $\mathbb{R}^*$ )

### Exercice n° 18

Soient les fonctions

$$u(x) = x^2 - 3x - 4 \quad , \quad v(x) = \frac{1}{x}$$

~~$v(u(x)) = \sin x$~~

Donner les formules des fonctions composées

$$u \circ v, \quad v \circ u, \quad v \circ x, \quad u \circ v \circ w,$$

puis donner leurs ensembles de définition respectifs.

\*  $v \circ u$  s' "à l'intérieur" de  $\mathcal{V}$  :  $v(u(x)) = \frac{1}{u(x)}$

$$\mathcal{V} \circ u(x) = \mathcal{V}(u(x)) = \frac{1}{u(x)}$$

soit :

$$\mathcal{V} \circ u(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

Valeur Interdite si  $x^2 - 3x - 4 = 0$  !

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 \quad (\sqrt{25} = 5)$$

↳ 2 valeurs interdites :  $x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$   
 et  $x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$

Concl<sup>o</sup>:  $D_{\mathcal{V} \circ u} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$ .

\* Décomposer :  $f(x) = \frac{1}{x^5}$ .

se décompose en :

$$x \xrightarrow{u} x^5 \xrightarrow{v} \frac{1}{x^5}$$

on pose :  $\underline{u(x)} = x^5$  et  $\underline{v(x)} = \frac{1}{x}$

on a :  $f(x) = \frac{1}{x^5} = v(u(x))$

Soir :  $\boxed{f = v \circ u}$

\* DECOMPOSER :  $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$  dm  
se décompose en

$$x \xrightarrow{u} x^2 - 3x + 1 \xrightarrow{\sigma} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

On pose  $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 1 \\ \sigma(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

on a bien

$$g(x) = \sqrt{u(x)} = \sigma(u(x))$$

Dans :  $g = \sigma \circ u$  avec