Continuité

Table des matières

I Motivation

Dans la vie réelle, une grandeur physique n'est en général connue que de manière approximative. Par exemple, on peut lire sur la notice d'un thermomètre que la température affichée a une précision de $\pm 0,1°C$. Cela signifie que si le thermomètre affiche $T_C = 38°C$, la valeur "réelle"[1] de la température est comprise entre $(38 - 0,1)°C$ et $(38 + 0,1)°C$. Si on s'intéresse maintenant à une fonction $f(T_C)$ de la température en degrés Celsius T_C, l'incertitude sur T_C engendrera une incertitude sur la valeur de $f(T_C)$. Prenons un exemple simple : lorsque f est la fonction associant à T_C la température T_F en degrés Fahrenheit. On sait que

$$T_F = f(T_C) = 1,8 \times T_C + 32 \ .$$

Quelle est l'incertitude sur $f(T_C)$ lorsqu'on sait juste que T_C est comprise entre $(38-0,1)$ et $(38+0,1)$? Puisque T_C peut prendre toutes les valeurs dans l'intervalle $[37,9;38,1]$, $f(T_C)$ peut prendre pour valeurs toutes les images des nombres de cet intervalle. Comme f est croissante, ces images sont toutes comprises entre $f(37,9)$ et $f(38,1)$. De plus, tout nombre entre $f(37,9)$ et $f(38,1)$ est l'image d'un nombre de l'intervalle $[37,9;38,1]$[2]. On peut s'en convaincre en pensant au graphe de la fonction f, qui est une droite, mais on peut aussi le démontrer (Exercice !)[3]. Par conséquent, notre connaissance de $f(T_C)$ est exactement qu'elle est comprise dans l'intervalle $[f(37,9); f(38,1)]$ qui est égal à $[100,22;100,58]$. Une question naturelle vient alors à l'esprit : si l'incertitude sur T_C était différente, que deviendrait l'incertitude sur $f(T_C)$? Un rapide calcul montre que si la précision du thermomètre était $\pm\varepsilon°C$, une mesure de $38°C$ donnerait une valeur de $f(T_C)$ comprise dans l'intervalle $[100,4-1,8\varepsilon;100,4+1,8\varepsilon]$. On peut faire deux remarques :

1. l'incertitude sur $f(T_C)$ n'est pas la même que l'incertitude sur T_C,
2. **plus l'incertitude sur T_C est petite, plus l'incertitude sur $f(T_C)$ est petite, et à la limite, lorsque l'incertitude sur T_C tend vers 0, l'incertitude sur $f(T_C)$ tend vers 0.**

1. D'autres modélisation de l'incertitude d'une mesure font intervenir des notions de probabilités. De plus la notion de température "réelle" n'est pas si évidente qu'il parait.
2. Elle vérifie ce qu'on appelle la propriété des valeurs intermédiaires, qui est vérifiée par toute fonction continue, cf. paragraphe III
3. C'est étroitement lié au fait que f admet une fonction réciproque, point dont on parlera plus tard

C'est cette deuxième remarque qui correspond à la notion de continuité. On voit qu'elle est exprimée sous forme de limite, et c'est ce qui fait la souplesse de la notion de continuité. En effet, dans l'exemple ci-dessus, nous avons pu calculer facilement et précisément l'incertitude sur $f(T_c)$ en fonction de l'incertitude sur T_C, mais cette facilité était due au fait que la fonction f était une fonction affine. En général, c'est nettement plus compliqué, et la notion de continuité permet de donner une définition rigoureuse et qualitative correspondant à la phrase du point 2 ci-dessus.

II Définitions et Exemples

Définition 1
Soit f une fonction et a un élément de son ensemble de définition D_f. On dit que f est **continue en** *a si (et seulement si) elle admet une limite en a, égale à $f(a)$. Autrement dit, f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

On dit que f est continue sur un sous-ensemble E de son ensemble de définition D_f si (et seulement si) elle est continue en chaque réel a de E.

Remarque 1
Comme on l'a souligné dans cette définition, la notion de continuité d'une fonction n'a de sens qu'en un point où cette fonction est définie.

La notion de continuité sur un intervalle I peut se comprendre graphiquement : la fonction f est continue sur I *si on peut tracer sa courbe représentative sur I sans lever le crayon.*

Dans la Figure 1, nous avons un exemple typique de fonction continue en un point a dans la figure de gauche, et à droite, l'exemple d'une fonction non continue en a : la limite à gauche et la limite à droite de cette fonction en a ne coincident pas (d'où le "saut" dans la représentation graphique), donc f n'admet pas de limite en a.

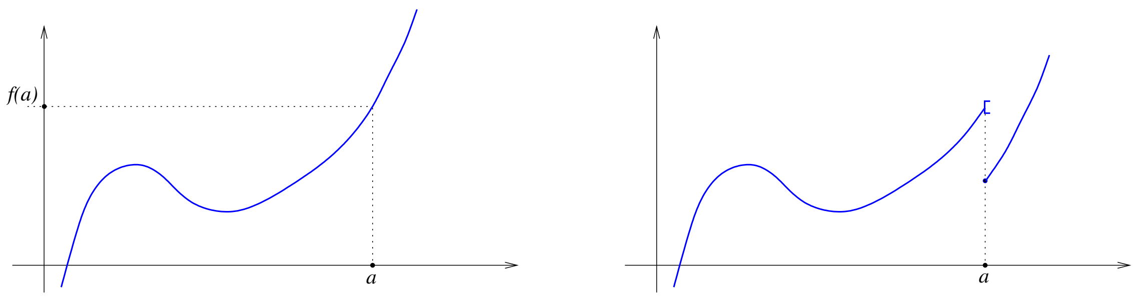

FIGURE 1 – Une fonction continue en a, et une autre discontinue en a.

Exemple 1
La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2+1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

Notons d'abord que cette fonction est bien définie en 0, et $f(0) = 2.0 + 1 = 1$. Il faut alors montrer que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Mais comme la formule pour cette fonction diffère selon que l'on se situe à gauche de 0 ($x < 0$) ou à droite de 0 ($x > 0$), il faut distinguer les deux limites à gauche et à droite. D'une part, on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 2x + 1 = 2.0 + 1 = 1$$

D'autre part,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Donc la fonction f admet bien une limite en 0, et cette limite est bien égale à $f(0)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0).$$

La fonction f est donc continue en 0.

Presque toutes les fonctions avec lesquelles nous travaillons sont continues sur leur intervalle de définition :

Propriété 1 (Exemples de fonctions continues)

⋆ les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$,
⋆ les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont continues sur leur domaine de définition,
⋆ la fonction racine carrée (et plus généralement les fonctions racines $n$ièmes) sont continues sur $[0, +\infty[$,
⋆ les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est continue sur son domaine de définition,
⋆ la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$,
⋆ toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de fonctions continues sont elles aussi continues sur leur domaine de définition.

En revanche, la fonction partie entière E est un exemple classique de fonction définie sur $\mathbb{R}$ et non continue en certaines valeurs (et donc non continue sur $\mathbb{R}$). Plus précisément, la fonction partie entière est non continue en chaque valeur entière de $\mathbb{R}$. Par exemple, montrons qu'elle n'est pas continue en 3 :

⋆ Pour toute valeur de x proche de 3 et *strictement plus petite* que 3, on a $E(x) = 2$. Donc la limite à gauche en 3 de la fonction partie entière est

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} E(x) = 2\ .$$

⋆ Pour toute valeur de x proche de 3 et *strictement plus grande* que 3, on a $E(x) = 3$. Donc la limite à droite en 3 de la fonction partie entière est

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} E(x) = 3\ .$$

La fonction partie entière n'admet donc pas de limite en $x = 3$, et n'est donc pas continue en ce point. Graphiquement (cf. Figure 2), on observe bien un 'saut' en $x = 3$ (et plus généralement en chaque valeur entière de x).

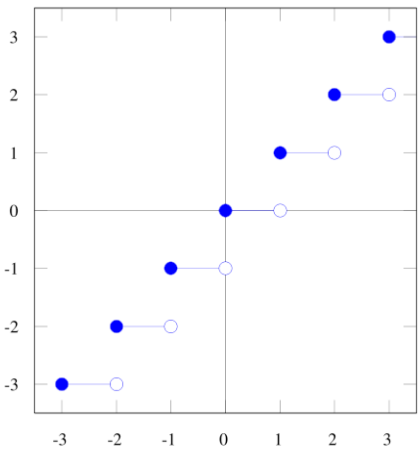

FIGURE 2 – Graphe de la fonction "partie entière"

III Le Théorème des valeurs intermédiaires

Une des applications importantes de la notion de continuité est le résultat suivant :

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, si une fonction est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors elle atteint *toutes les valeurs entre* $f(a)$ *et* $f(b)$. Graphiquement (cf. Figure 3), le fait que f est continue sur $[a; b]$ signifie que le graphe de f relie les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ par une courbe continue (traçable 'sans lever le crayon'). En particulier, ce graphe croise toute droite horizontale $y = k$ pour k entre $f(a)$ et $f(b)$: l'abscisse d'un point d'intersection est un réel c tel que $f(c) = k$. Ce théorème (dont nous omettrons

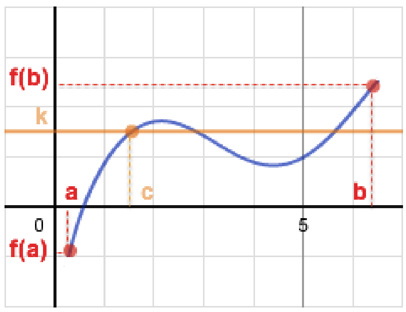

FIGURE 3 – Théorème des valeurs intermédiaires

soigneusement de donner la preuve ici) a plusieurs conséquences intéressantes :

Propriété 2
Si f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois entre a et b.

Démonstration : Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors $k=0$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, et la Proposition est obtenue en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires avec $k=0$. $\square$

Propriété 3
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c compris entre a et b tel que : $f(c)=k$.

Démonstration : Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit d'abord qu'il existe *au moins un* réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$. Montrons ensuite qu'il y en a *exactement un*. Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe *deux* réels distincts c_1 et c_2 tels que $f(c_1)=f(c_2)=k$.

Puisque c_1 et c_2 sont distincts, il y en a un plus grand que l'autre : par exemple, $c_1<c_2$. Mais puisque f est strictement monotone sur $[a;b]$, cela signifie que soit $f(c_1)<f(c_2)$ (si f est strictement croissante), soit $f(c_1)>f(c_2)$ (si f est strictement décroissante). Dans les deux cas, on obtient une contradiction avec le fait que $f(c_1)=f(c_2)$. $\square$

En combinant ces deux propriétés, on obtient que si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule exactement une fois entre a et b.

Exemple 2
L'équation $(x+1)^3+x=0$ admet une unique solution réelle, comprise entre -1 et 0.

En effet, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^3+x$ est continue et strictement croissante (comme somme et composée de fonctions continues et strictement croissantes). De plus, on a $f(-1)=-1$ est négatif et $f(0)=1$ est positif, donc f s'annule exactement une fois entre -1 et 0.

Ces propriétés peuvent être étendues à un intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ (ou semi-ouvert $[\alpha,\beta[$ ou $]\alpha,\beta]$), avec α,β finis ou infinis : dans le cas de bornes ouvertes ou infinies, il faut alors remplacer les images de a et de b par les limites de f aux bornes de l'intervalle :

Propriété 4 (TVI sur un intervalle ouvert)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $]\alpha,\beta[$, avec α,β dans $\mathbb{R}$ ou égaux à $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que f possède une limite l (finie ou infinie) quand $x\to\alpha$ avec $x>\alpha$, et une limite L (finie ou infinie) quand $x\to\beta$ avec $x>\beta$.

Alors, pour tout réel k strictement compris entre l et L, il existe au moins un réel c dans $]\alpha,\beta[$ tel que $f(c)=k$.

De plus, si f est strictement monotone, c est unique.

Exemple 3
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

On veut savoir quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Réponse : La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$. Puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et que $f(1) = -3$, et que $0 \in]-3, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $]-\infty; 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert.

En revanche, puisque f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la fonction f n'atteint pas la valeur 0 sur $[1; +\infty[$.
En conclusion l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]-\infty; +\infty[$.

IV Fonctions réciproques

Définition 2
Deux fonction f et g sont réciproques l'une de l'autre *si, pour tout $a \in D_f$ d'image $f(a) = b$, on a $b \in D_g$ et $g(b) = a$.*
On note alors $g = f^{-1}$ (et $f = g^{-1}$).

Autrement dit, la fonction f^{-1} "déconstruit" ce qu'a construit la fonction f :

$$a \overset{f}{\longmapsto} b \overset{f^{-1}}{\mapsto} a,$$

c'est-à-dire que, pour tout $a \in D_f$, on a $f^{-1}(f(a)) = a$.

Comme nous venons de le voir, une conséquence importante du théorème des valeurs intermédiaires est la suivante (Proposition 3) :
Si f est continue sur $[a; b]$ et est strictement croissante, alors pour tout y avec $f(a) \leq y \leq f(b)$, il existe un *unique* réel $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = y$.
Autrement dit, toute valeur de y dans $[f(a); f(b)]$ admet un unique antécédent par f dans $[a, b]$.
On note $x = f^{-1}(y)$ et on définit ainsi la fonction f^{-1}, définie sur $[f(a); f(b)]$, appelée la *fonction réciproque de la fonction f*, et qui à tout $y \in [f(a); f(b)]$ associe son unique antécédent par f :

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Propriété 5 (Théorème des fonctions réciproques)
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle admet une fonction réciproque f^{-1}, elle aussi strictement monotone (de même nature que f) et elle aussi continue.

Remarque 2
Par 'de même nature que f', on entend : la fonction réciproque d'une fonction strictement croissante est elle-même strictement croissante, et celle d'une fonction strictement décroissante est elle-même strictement décroissante.

Exemple 4
La fonction $f(x) = 2x - 5$ est strcitement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, et admet donc une fontion réciproque f^{-1}. Mais comment établir la formule de cette fonction réciproque ? Il faut pour cela 'inverser' la formule de $f(x)$:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

donne ici

$$\begin{aligned} 2x - 5 = y \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x = y + 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

On a donc établi que la fonction réciproque de $f(x) = 2x - 5$ est donnée par $f^{-1} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
On peut vérifier que $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ pour tout réel x :

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(2x-5) + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = x,$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = 2f^{-1}(x) - 5 = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) - 5 = (x+5) - 5 = x.$$

Exemple 5
La fonction carrée est continue, et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Sa fonction réciproque est la fonction racine carrée : pour tout x dans $[0 = \infty[$, on a $\sqrt{(x^2)} = x$, et $(\sqrt{x})^2$.

Exemple 6
La fonction cube est continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la fonction racine cubique, définie sur $\mathbb{R}$ et notée $\sqrt[3]{x}$: pour tout réel x, on a $\sqrt[3]{(x^3)} = x$, et $(\sqrt[3]{x})^3$.

V Image d'un intervalle par une application continue

Voici une autre conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Propriété 6 (Image d'un intervalle par une application continue)
Si f est continue sur un intervalle I, alors l'ensemble

$$f(I) := \{f(x) \text{ tels que } x \in I\}$$

est un intervalle.

Démonstration : Pour montrer cela, il suffit de voir que $f(I)$ n'a pas de "trou" : si on choisit deux valeurs y_1 et y_2 dans $f(I)$, avec $y_1 \leq y_2$, montrons que toute valeur y dans $[y_1; y_2]$ est aussi dans $f(I)$.

Puisque y_1 (resp. y_2) est dans $f(I)$, par définition, il existe un nombre a (resp. b) dans I tel que $f(a) = y_1$ (resp. tel que $f(b) = y_2$). Puisque I est un intervalle, toutes les valeurs entre a et b sont aussi dans I :

$[a;b] \in I$, et par le théorème des valeurs intermédiaires, pour toute valeur y entre $y_1 = f(a)$ et $y_2 = f(b)$, il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = y$. Mais cela signifie précisément que y est dans $f(I)$, ce qu'il fallait demontrer. □

Le fait que la fonction f soit continue est essentiel dans la Propriété 6. Par exemple, si on regarde la fonction partie entière E sur l'intervalle $[0;1]$ (qui, rappelons le, n'est pas continue en 1), l'ensemble des valeurs prises par cette fonction est $f([0;1]) = \{0;1\}$, qui est loin d'être un intervalle !

Dans le cas d'une fonction monotone on détermine très simplement l'intervalle image :

Propriété 7
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $I = [a,b]$.

Si f est croissante alors $f(I) = [f(a), f(b)]$. Si f est décroissante alors $f(I) = [f(b), f(a)]$.

Exemple 7
Attention, si la fonction n'est pas monotone sur l'intervalle considéré, ce n'est pas vrai. Par exemple en prenant $f(x) = x^2$, et $a = -2$ et $b = 3$, on a que $f(I)$ n'est pas égal à $[f(-2), f(3)]$. En effet $f(-2) = (-2)^2 = 4$ et $f(3) = (3)^2 = 9$, mais $0 \in I$ et $f(0) = 0$ n'est pas compris entre 4 et 9.

Pour déterminer l'image de l'intervalle $[-2,3]$, on le découpe en intervalles sur lesquels la fonction est monotone (par exemple grace au tableau de variations de f) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f : x \mapsto x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Comme f est continue et décroissante sur $[-2,0]$, on a $f([-2,0]) = [f(0), f(-2)] = [0,4]$. De plus f est continue et croissante sur $[0,3]$, donc $f([0,3]) = [f(0), f(3)] = [0,9]$. Donc $f([-2,3]) = [0,4] \cup [0,9] = [0,9]$.

Dans le cas d'un intervalle ouvert on a la propriété analogue suivante :

Propriété 8
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$, avec α, β dans $\mathbb{R}$ ou égaux à $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que f possède une limite l (finie ou infinie) quand $x \to \alpha$ avec $x > \alpha$, et une limite L (finie ou infinie) quand $x \to \beta$ avec $x > \beta$.

Si f est croissante, alors $f(I) =]l, L[$.

Si f est décroissante, alors $f(I) =]L, l[$.

Exemple 8
On reprend la fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}$ de tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

On veut déterminer l'image par f de $]-\infty, 1[$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et f a pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et -3 en 1^-, donc $f(]-\infty, 1[) =]+\infty, -3[$.

Pour déterminer l'image par f de $]1, +\infty[$: f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et f a pour limites -3 en 1^+ et 0 en $+\infty$, donc $f(]1, +\infty[) =]-3, 0[$.

VI Application : la méthode de résolution d'une équation par dichotomie

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I_0 = [a; b]$. On souhaite trouver une solution à l'équation :

$$f(x) = 0, \quad x \in [a; b] \ . \tag{1}$$

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes distincts, on sait (par le théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe une solution à l'équation (1). La méthode de résolution par dichotomie permet de trouver une solution à une erreur fixée près, en un nombre fini d'étapes, en calculant successivement certaines images par la fonction f. Le principe est simple : soit c le milieu de $[a; b]$. On a alors deux possibilités :

- ⋆ soit $f(c)$ est du signe opposé à $f(a)$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une solution de (1) dans l'intervalle $[a; c]$, et on pose $I_1 = [a; c]$,
- ⋆ soit $f(c)$ est du signe opposé à $f(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une solution de (1) dans l'intervalle $[c; b]$, et on pose $I_1 = [c; b]$.

Dans les deux cas, on est revenu à la situation de départ : f est continue et change de signe sur I_1, mais la longueur de I_1 a été divisée par deux ! On peut réitérer le procédé, à chaque étape la longueur de l'intervalle considéré est divisée par 2, ce qui permet d'obtenir une précision souhaitée en un nombre fini d'étapes.

Exemple 9
Trouver des valeurs approchées à $0,01$ près des solutions de l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$.

La fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x + 1$ est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car c'est une somme de fonctions de référence continues et strictement croissantes). Elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$ et est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme), donc il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires, une unique solution x_0 à l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$. Par ailleurs, $f(-1) = -3$ et $f(0) = 1$, donc x_0 est dans l'intervalle $[-1; 0]$, et on peut effectuer une dichotomie sur cet intervalle. On calcule successivement :

$$\begin{aligned}
f(-1/2) = -0.625 \quad &\rightarrow \quad x_0 \in [-1/2; 0] \\
f(-1/4) = 0.234375 \quad &\rightarrow \quad x_0 \in [-1/2; -1/4] \\
f(-3/8) = -0.1777344 \quad &\rightarrow \quad x_0 \in [-3/8; -1/4] \\
f(-5/16) = 0.03198242 \quad &\rightarrow \quad x_0 \in [-3/8; -5/16] \\
f(-11/32) = -0.0718689 \quad &\rightarrow \quad x_0 \in [-11/32; -5/16] \\
f(-21/64) = -0.01970291 \quad &\rightarrow \quad x_0 \in [-21/64; -5/16]
\end{aligned}$$

On peut donc proposer pour valeur approchée de x_0 le milieu du dernier intervalle : $-41/128$, en sachant qu'on se trompe d'au plus la moitié de la largeur de l'intervalle, c'est à dire $1/128$, qui est bien inférieur à $0,01$.