TD 6 :

Rappels (Cours-TD)

0) On note $e_n(x) = e^{inx}$ et si $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est 2π-périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et $n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N}$ ses coefficient de Fourier sont $c_n(g) =< g, e_n >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx$ et

$$a_m(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(mx)dx \quad \text{et} \quad b_m(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(mx)dx$$

a) Si $\overline{g}$ est l'application conjuguée $x \mapsto \overline{g(x)}$ et $m \in \mathbf{N}$, établir les relations

$$\overline{c_{-m}(\overline{g})} = c_m(g)) = \frac{1}{2}[a_m(g) + ib_m(g)]$$

b) Prouver que, si g est à valeurs réelles $a_m(g), b_m(g) \in \mathbf{R}$ sont réels, et toujours $b_0(g) = 0$ et

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(g)e^{inx} = -\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{m=0}^{N} a_m(g)\cos(mx) + b_m(g)\sin(mx)\ \text{, et si } N > 0$$

$$= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{m=1}^{N} a_m(g)\cos(mx) + b_m(g)\sin(mx)$$

c) Prouver que si g est paire (resp. impaire) alors pour tout entier naturel $m \in \mathbf{N}$ on a $b_m(g) = 0$ (resp. $a_m(g) = 0$). La réciproque est-elle vraie?
d) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}, h(x) = g(-x), \quad g_p = \frac{1}{2}[g + h], g_i = \frac{1}{2}[g - h]$.
Prouver que h, g_p, g_i sont 2π-périodiques intégrables sur $[-\pi, \pi]$, que g_p est paire, g_i impaire et que l'on a $g = g_p + g_i$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N},\ c_n(h) = c_{-n}(g), a_m(g) = a_m(g_p), b_m(g) = b_m(g_i)$.
d) Soit $\tau \in \mathbf{R}$ et $g_\tau : \mathbf{R} \to \mathbf{C}, g_\tau(x) = g(x - \tau)$.
Prouver que g_τ est 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbf{Z},\ c_n(g_\tau) = c_n(g)e^{-in\tau}$.

Quelques calculs de série de Fourier

1) a) Prouver que toute fonction Riemann intégrable $f : [0, \pi] \to \mathbf{C}$ se prolonge uniquement à $\mathbf{R}$, en une fonction 2π périodique et paire, notée f_p et que
a1) Pour tout $m \in \mathbf{N}$ on a $a_m(f_p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$ et $b_m(f_p) = 0$.
b) Dans les cas $f(x) = x, x^2, \sin(x), |\cos(x)|, x\sin(x), x\cos(x), x(1 + \cos(x)), e^x$,
tracer le graphe et déterminer les coefficients $a_m(f_p)$ de cette extension paire de f.
c) Dans chacun des cas de b) vérifier que la série de Fourier $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(f_p)$ est normalement, donc uniformément, convergente. Que vaut la somme?
d) Prouver qu'il y a des réels α, β, γ (et donnez leurs valeurs) tels que si $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ alors $a_0(f_p) = 0$ et, si $m > 0, a_m(f_p) = \frac{1}{m^2}$. En déduire la valeur de la série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$.

2) a) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, 2π-périodique dont la restriction $g_{[a,a+2\pi]}$ à un intervalle $[a, a+2\pi]$ de longueur 2π est de classe C^2.
Prouver qu'il y a une constante K telle que pour tout $n \neq 0$ on ait $|c_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}$.
b) Le résultat a) explique-t-il les convergences observées en **1)**c)?
c) Etendre a) au cas où g (toujours continue 2π-périodique) est C^2 par morceaux[1].
d) Soit $\epsilon > 0$. Etendre a) au cas où g est $\mathrm{C}^{1+\epsilon}$ par morceaux[2].

3) a) Prouver que si $f : [0, \pi] \to \mathbf{C}$ est Riemann-intégrable alors $f_{|]0,\pi[}$ a un unique prolongement à $\mathbf{R}$, qui est 2π périodique et impaire et, si on note f_i ce prolongement, que :
a1) Pour tout $m \in \mathbf{N}$ on a $a_m(f_i) = 0$ et $b_m(f_i) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$.
b) Dans les cas $f(x) = 1, x, x^2, \sin(x), |\cos(x)|, x\sin(x), x\cos(x), x(1 + \cos(x)), e^x$,
tracer le graphe et déterminer les coefficients $b_m(f_i)$ de cette extension impaire de $f_{|]0,\pi[}$.

---

[1] il y a $a = a_0 < \cdots < a_N = a + 2\pi$ tels que pour $1 \leq k \leq N$ la restriction $g_{[a_{k-1}, a_k]}$ est C^2.

[2] il y a $a = a_0 < \cdots < a_N = a + 2\pi$ tels que pour $1 \leq k \leq N$ la restricition $g_k = g_{[a_{k-1}, a_k]}$ est de classe C^1 et il y a K_k tels que pour tout $x, x' \in [a_{k-1}, a_k]$ on a $|g'_k(x) - g'_k(x')| \leq K_k|x - x'|^\epsilon$.

Suite du TD 6 et compléments

Deux lemme sur les fonctions Riemann-intégrables

4) Soit $f, g : [a,b] \to \mathbf{C}$ Riemann-intégrables sur un intervalle $[a,b]$. Sur $[a,b]$ on définit F, G : $F(x) = \int_a^x f(t)dt, G(x) = \int_a^x g(t)dt$ et pose $[FG]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$.
a) Prouver que F et G sont continues (donc Riemann-intégrables). Sont-elles dérivables?
b) Etablir, en écrivant, si $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ est une subdivision de $[a,b]$, $F(b)G(b) - F(a)G(a) =$ $= \sum_{k=1}^N F(a_k)[G(a_k) - G(a_{k-1})] + [F(a_k) - F(a_{k-1})]G(a_{k-1})$, et considérant, pour $1 \le k \le N$, les oscillation u_k, v_k de f et g sur $[a_{k-1}, a_k]$, la *formule d'intégration par parties* :

$$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Intégration de séries de Fourier

5) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique, Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$.
a) Prouver que $G : \mathbf{R} \to \mathbf{C}, G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$ est 2π-périodique si et seulement si

$$c_0(g) = 0$$

b) En ce cas, calculer les coefficients de Fourier de G (qui d'après **4)**a), est aussi continue).
c) En considérant la fonction f_p de **1)**d), calculer, pour $k = 1, 2, 3$ la somme des séries de Riemann

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2k+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2k}}$$

Majorations de la dérivée d'un polynôme trigonométrique

6) Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n$ un polynôme trigonométrique de degré au plus N.
a) Prouver que si $|m| > N$ alors $P * e_m = 0$.
b) On note $K_{N-1} = \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-k}^{k} e_n$ le noyau de Fejer de degré $N-1$.
Montrer (en ne se contentant pas de remplacer n par $N-1$ dans les formules du cours!)

$$K_{N-1}(x) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e_k = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right\}^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{N-1}(x)dx = 1$$

c) Déduire, si $L(x) = 2N K_{N-1}(x) \sin(Nx)$, de a) et la première formule de b) la relation

$$P' = -P * L$$

d) Déduire des deux dernières formules de b) la majoration $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(x)|dx \le 2N$.
e) Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a la majoration :

$$|P'(x)| \le 2N \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |P(t)|$$