TD 5 :

Quelques calculs d'intégrales

1) a) Soit $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$. Par intégration par partie établir, pour $n > 0$ la relation $\frac{2n+1}{2n}I_n = I_{n-1}$. En déduire $I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{n+1}2^{2n}\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n \end{pmatrix}^{-1}$.

b) A partir de la formule de a), vérifier la véracité de la minoration du cours

$$I_n \geq 2\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{2}{n+1}$$

c) A l'aide de la formule de Striling $m! \sim \sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m$ estimer

c1) l'erreur faite en b).

c2) Si $\lambda \in [0,1[$ la norme uniforme $\|P_n\|_{1-\lambda^2 \leq x^2 \leq 1}$ de la restriction du polynôme $P_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{I_n}$ au complémentaire $[-1,1]\!\!] - \lambda, \lambda[$ de $]-\lambda,\lambda[$ dans $[-1,1]$ et comparez cette estimation avec celle faite cours.

2) a) Etablir pour tout $t \in \mathbf{R}$ la relation $1+\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}})^2$ $[= 2\cos^2(\frac{t}{2})]$.

b) Rappeler pourquoi il y a pour $0 \leq k \leq n$ des $a_k \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}$ on ait la *relation de linéarisation* : $(\frac{1+\cos(t)}{2})^n = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt)$.

c) Déduire de a) la valeur des a_k, puis celle de $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1+\cos(t)}{2})^n dt = \frac{2\pi}{4^n}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

d) Comme dans **1)** b) et c) Comparer cette valeur avec la minoration du cours $J_n \geq \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1+\cos(t)}{2})^n \sin(t)dt = \frac{2}{n+1}$, estimer la norme uniforme $\|Q_n\|_{|\delta| \leq t \leq 1}$ de la restriction du polynôme trigonométrique $Q_n(t) = \frac{\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n}{J_n}$ au complémentaire $[-\pi,\pi]\!\!] -\delta,\delta[$ de $]-\delta,\delta[$ dans $[-\pi,\pi]$ et comparer avec l'estimation du cours.

Conséquences du théorème de Weierstrass

3) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une application continue telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ on ait $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$. Prouver que $f = 0$.

4) Soit $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$, pour $n \in \mathbf{N}$ on considère l'intégrale $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-\omega t}dt$.

a) Prouver que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ l'intégrale I_n est convergente.

b) Etablir pour n positif la relation de récurrence $I_n = \frac{n}{\omega}I_{n-1}$.

c) En déduire la valeur $I_n = \frac{n!}{\omega^{n+1}}$, puis :

d) Pour tout entier naturel $m \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\int_0^\infty t^{4m+3}e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}})dt = 0$.

e) Déduire de d) que si $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}, f(x) = e^{-x^{\frac{1}{4}}}\sin(x^{\frac{1}{4}})$, alors pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ la fonction $x^n f(x)$ est absolument intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f(x)dx = 0$.

[on pourra effectuer le changement de variable $x = \frac{t^4}{4}$].

Calculs de coefficients de Fourier

5) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique t.q. $f(\pi) = 0$ et si $x \in]-\pi,\pi[, f(x) = x$.

a) Calculer les coefficients de Fourier réels $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ et pour $n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}, a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx, b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$.

b) Par sommation d'Abel, prouver que la série de Fourier de f converge vers f.

6) Reprendre les questions de l'exercice **5)** avec $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par, si $k \in \mathbf{Z}$ alors $g((k+\frac{1}{2})\pi) = 0$ et si $|x - k\pi| < \frac{\pi}{2}, g(x) = (-1)^k$. Comparer avec **1)** de TD3.

Suite du TD 5 et compléments

D'autres calculs et estimations d'intégrales

1') a) Soit n un entier positif et $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ deux fonctions de classe C^n. Etablir

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx = \Big[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f^{(n-k)}g^{(k-1)}\Big]_a^b + (-1)^n\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx$$

b) Calculer la valeur de l'intégrale I_n de **1)** a) en appliquant à $f(x)=(1+x)^{2n}$ et $g(x)=(1-x)^n$ la *formule d'intégration par parties itérée* établie en a).

2') Soit $K_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\frac{t}{2})^{2n}dt$. Par intégration par partie établir, pour $n>0$, la relation de récurrence $K_n=\frac{2n-1}{2n}K_{n-1}$. En déduire un autre calcul de l'intégrale J_n de **2)**.

7) Soit $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann [donc vérifiant la *condition de Riemann :* Pour tout $\epsilon>0$ il y a $\delta>0$ tel que si $a=a_0<\cdots<a_N=b$ avec $\max\limits_{1\le i\le N} a_i-a_{i-1}\le\delta$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sup_{a_{i-1}\le s,t\le a_i}|f(s)-f(t)|(a_i-a_{i-1})\le\epsilon$].

a) Déduire de la condition de Riemann $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\omega t)dt=0$.

b) Déduire du cours le résultat (apparemment) plus faible $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\mathbf{N}\ni k\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(k\frac{2\pi}{b-a}t)dt=0$.

c) Prouver que si $\alpha\in[c,d]$ est dans un intervalle borné alors, uniformément en α, on a :

$$\operatorname*{Lim}_{h\to0}\int_a^b[f(t)\cos(\alpha(t+h))-f(t)\cos(\alpha t)]^2dt=0=\operatorname*{Lim}_{h\to0}\int_a^b[f(t)\sin(\alpha(t+h))-f(t)\sin(\alpha t)]^2dt$$

d) En écrivant $\frac{(b-a)\omega}{2\pi}=[\frac{(b-a)\omega}{2\pi}]+\{\frac{(b-a)\omega}{2\pi}\}$, où $[\frac{(b-a)\omega}{2\pi}]\in\mathbf{Z}$ et $\{\frac{(b-a)\omega}{2\pi}\}\in[0,1[$, déduire a) des résultats du cours et de c).

La preuve de Bernstein du théorème de Weierstrass

8) Si n,ν sont entiers avec $0\le\nu\le n$, le $\nu^{\text{ième}}$ *polynôme de Bernstein* de degré n est $\varphi_\nu=\varphi_{\nu,n}:[0,1]\to[0,1], \varphi_\nu(x)=\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$. On se propose d'établir :

Soit $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ continue avec pour tout $x\in[0,1], |f(x)|\le1$ et $\epsilon>0,\delta>0$ tels que $s,t\in[0,,1], |s-t|\le\delta$ implique $|f(s)-f(t)|\le\epsilon$ alors pour tout entier $n\ge\frac{2}{\epsilon\delta^2}$ et $x\in[0,1]$ on a :

$$|f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}f(\frac{\nu}{n})\varphi_\nu(x)|\le\epsilon$$

a) Prouver que la somme $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\varphi_\nu$ est la fonction constante 1.

b) Etablir pour tout entiers naturels $\nu,n\in\mathbf{N}$ avec $0<\nu\le n$ la relation $\nu\binom{n}{\nu}=n\binom{n-1}{\nu-1}$, en déduire si $1<\nu\le n$ la relation $\nu(\nu-1)\binom{n}{\nu}=n(n-1)\binom{n-2}{\nu-2}$, puis

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu\varphi_\nu(x)=nx,\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\nu(\nu-1)\varphi_\nu(x)=n(n-1)x^2$$

$$(*)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}(\nu-nx)^2\varphi_\nu(x)=nx(1-x)$$

c) Etablir $\Big|f(x)-\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}f(\frac{\nu}{n})\varphi_\nu(x)\Big|=\Big|\sum_{\nu=0}^{n}\Big(f(x)-f(\frac{\nu}{n})\Big)\varphi_\nu(x)\Big|$. En coupant cette dernière somme suivant que $|\nu-nx|\le\delta n$ ou $|\nu-nx|>\delta n$ (et dans ce dernier cas utilisant $1\le\frac{(\nu-nx)^2}{\delta^2n^2}$) déduire le théorème de Bernstein de la relation $(*)$.