TD 4 :

Une fonction continue nulle part différentiable

1) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction continue et $x_0\in\mathbf{R}$.
Prouver que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ a une limite quand (h,k) tend vers $(0,0)$ dans l'ensemble des couples tels que $h,k\geq 0$ et $h+k>0$.

2) Soit $\epsilon\in]0,1]$ et $f,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{1+\epsilon}h(x)$, $h(0)=0$ et si $x\neq 0, h(x)=\sin(\frac{\pi}{x})$.
Prouver que f est dérivable mais que que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ n'a pas de limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$ dans l'ensemble des couples (x,y) tels que $x>0, y>0$ et $x\neq y$.

3) Soit $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la suite de fonctions telle que, pour $n\in\mathbf{N}, k\in\mathbf{Z}$, f_n est affine sur l'intervalle $I_{n,k}=[\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}]$ (si $t\in I_{n,k}, f_n(t)=\alpha_{n,k}\,t+\beta_{n,k}$), $f_0=\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$, $f_0(x)=x$ et

$$f_n(\frac{k}{3^{n-1}})=f_{n-1}(\frac{k}{3^{n-1}}),\quad f_n(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n})=f_{n-1}(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}),$$
$$f_n(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n})=f_{n-1}(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n})$$

a) Tracer les graphes de la restriction à l'intervalle $[0,1]$ de f_0, f_1 et f_2.
b) Prouver que les $f_n(I_{n,k})$ sont des intervalles de longueur $L_{k,n}\in[(\frac{1}{3})^n,(\frac{2}{3})^n]$.
En déduire que pour tout entier positif n et tout $x\in I$ on a $|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leq(\frac{2}{3})^n$, puis que la suite f_n converge uniformément vers une fonction continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.
c) En remarquant que pour tout $x\in\mathbf{R}$ et $n\in\mathbf{N}$ il y a $k\in\mathbf{Z}$ tel que $\frac{k}{3^n}\leq x\leq\frac{k+1}{3^n}$ et en utilisant **1)** prouver que f n'admet de dérivée en aucun point de $\mathbf{R}$.

Suites de fonctions convergeant vers la dérivée $n^{\text{ième}}$

4) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une application dérivable. a) Prouver que la suite de fonction $(g_n)_{n>0}$ où $g_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ converge vers $g=f'$ et que la convergence est uniforme sur les intervalles fermés si et seulement si f' est continue. b) Traiter directement le cas de h de **2)**.

5) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, Q\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ et n un entier naturel. a) Expliciter dans les cas $n=0,1,2$ la fonction $f_Q^n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_Q^n(x)=Q^n[\sum_{k=0}^n\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(-1)^{n-k}f(x+\frac{k}{Q})]$. On suppose désormais $n\geq 2$.
b) Etablir si $n\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}$ la relation $f_Q^{n+1}(x)=Q[f_Q^n(x+\frac{1}{Q})-f_Q^n(x)]$.
c) En déduire que si f a des dérivées jusqu'à l'ordre n et $f^{(n)}$ est continue[1]alors

$$f_Q^n(x)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f^{(n)}(x+\frac{t_n+\cdots+t_1}{Q})\,dt_n\cdots dt_1$$

puis $\lim\limits_{Q\to+\infty} f_Q^n(x)=f^{(n)}(x)$, la limite étant uniforme sur les intervalles fermés.
d) On suppose $n>0$, f $n-1$ fois dérivable et admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ en $x_0\in\mathbf{R}$.
d1) Prouver que si$f(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$ alors $\lim\limits_{Q\to+\infty} f_Q^n(x_0)=0$.
d2) En considérant les fonctions $f(x)-\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$ et $\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$, déduire de d1) et c) : $\lim\limits_{Q\to+\infty} f_Q^n(x_0)=f^{(n)}(x_0)$.
e) Soit $Q_k>0$ tendant vers $+\infty$ avec k t.q. f continue et $f_{Q_k}^n$ converge uniformément sur les intervalles fermés. e1) Prouver[2]que f est de classe C^n et pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{Q_k}^n(x)=f^{(n)}(x)$.
e2) A-t-on la même conclusion si $f_{Q_k}^n$ converge seulement simplement?, si f_Q^n converge simplement quand $]0,+\infty[\ni Q\to+\infty$? [Si $n>1$ et $\epsilon,\alpha>0$, considérer $f(x)=x^{n+\epsilon}\sin(\frac{1}{x^\alpha})$].
f) Soit $n,q\in\mathbf{N}$ avec $q>1$ et $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que pour tout $a\in\mathbf{Z}$ et $m\in\mathbf{N}$ on a $q^{nm}f(\frac{a}{q^m})\in\mathbf{Z}$.
f1) Prouver que si f admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ alors pour tout $a\in\mathbf{Z}$ et $m\in\mathbf{N}$ on a $f^{(n)}(\frac{a}{q^m})\in\mathbf{Z}$.
f2) En déduire que soit f est un polynôme de degré au plus n, soit f n'est pas de classe C^n.

---
[1] *c.a.d.* f est de classe C^n.
[2] en considérant la limite g de la suite $f_{Q_n}^n$ et $G(x)=\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} g(x_n)\,dx_n\cdots dx_1$.

Suite du TD 4 et compléments

D'autres fonctions continues nulle part différentiables

1') Soit $0<b<1$ et a un entier impair. Prouver que la série $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x)$.
a) converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
b) la série dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} b^n(-\pi a^n \sin(\pi a^n x))$ ne converge en un point $x \in \mathbf{R}$ que si $ab<1$ ou si $x=\frac{c}{a^n}$, $c\in\mathbf{Z}$ est un rationnel de dénominateur une puissance de a.

3') On va établir *Si* $0 < b < 1$ *et* $a = 2k + 1$ *est un entier impair avec* $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$ *alors la fonction* $f_{a,b}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x)$ *n'est dérivable en aucun point de* $\mathbf{R}$.
a) Prouver que si $x_0 \in \mathbf{R}$ est un réel alors pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ il y a un unique entier $\alpha_m \in \mathbf{Z}$ et un unique $x_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ tel que $a^m x_0 = \alpha_m + x_m$ et qu'alors, si $x'_m = \frac{\alpha_m}{a^m} - \frac{1}{a^m}$ et $x''_m = \frac{\alpha_m}{a^m} + \frac{1}{a^m}$ on a $x'_m < x_0 < x''_m$ et $x''_m - x'_m$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini.
b) Etablir pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ les égalités

$$\cos(\pi a^{m+k} x'_m)=(-1)^{\alpha_m+1}=\cos(\pi a^{m+k} x''_m) \text{ et } \cos(\pi a^{m+k} x_0)=(-1)^{\alpha_m} \cos(a^k x_m)$$

puis qu'il y a des nombres $\eta'_m, \eta''_m > 1$ supérieurs à 1 tels que :

$$\frac{1}{x''_m - x_0}[\sum_{n=m}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x''_m) - \sum_{n=m}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x_0)] = (-1)^{\alpha_m+1} \frac{(ab)^m}{1 - x_m} \eta''_m$$

$$\frac{1}{x_0 - x'_m}[\sum_{n=m}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x_0) - \sum_{n=m}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x'_m)] = (-1)^{\alpha_m} \frac{(ab)^m}{x_m + 1} \eta'_m$$

c) En utilisant l'identité remarquable $\cos(v) - \cos(u) = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$ et, pour $u \neq 0$ la majoration $|\frac{\sin(u)}{u}| \leq 1$ établir pour $w = x'_m, x''_m$ les majorations

$$|\frac{1}{w - x_0}[\sum_{n=0}^{m-1} b^n \cos(\pi a^n w) - \sum_{n=0}^{m-1} b^n \cos(\pi a^n x_0)]| \leq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ba)^n = \pi \frac{(ba)^m - 1}{ba - 1} < \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1}$$

d) En déduire que si $\frac{3}{2} \frac{\pi}{ab-1} < 1$ alors les taux d'accroissements $\frac{f(x'_m)-f(x_0)}{x'_m - x_0}$ et $\frac{f(x''_m)-f(x_0)}{x''_m - x_0}$ sont de signes opposés et tendent en valeur absolue vers l'infini. Conclure.

Ensembles dénombrables et suites et séries de fonctions

6) On note $\mathcal{D} = \{\frac{k}{2^m} \,;\, k \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des nombres dyadiques. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ t.q.

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1 \text{ et si } 2^m \leq k < 2^{m+1}, \varphi(k) = \frac{2(k - 2^m) + 1}{2^{m+1}} = \frac{2k + 1}{2^{m+1}} - 1$$

a) Prouver que l'application φ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur $[0, 1] \cap \mathcal{D}$.
b) Soit $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si $x \notin [0, \frac{2}{n}], g_n(x)=0$, si $x \in [0, \frac{1}{n}], g_n(x)=nx$ et si $x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], g_n(x)=2 - nx$.
b1) Prouver que g_n est continue et, pour $n = 1, 2, 3$ tracer le graphe de g_n.
b2) En déduire que, pour tout $t \in \mathbf{R}$ la série $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} g_n(t - \varphi(m))$ converge et que la fonction $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par la somme de cette série est continue.
c) Prouver que la suite f_n converge simplement vers la fonction nulle 0, mais que la convergence n'est uniforme dans aucun sous-intervalle (à au moins deux points) de $[0, 1]$.

7) Soit $N \in \mathbf{N}$. Déterminer le nombre d'élément de $\{(m, n) \in \mathbf{N} \,;\, m + n \leq N\}$. En déduire que l'application $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \psi(m, n) = \frac{(m+n)^2+3m+n}{2} = \frac{(m+n)(m+n+3)}{2} - n$ est bijective.

8) Soit $X \subset \mathbf{N}$ une partie infinie de $\mathbf{N}$. Prouver qu'il y a une unique application $\nu_X : \mathbf{N} \to X$ vérifiant pour tout $n\in\mathbf{N}$ la partie $X_n = X \backslash f(\{m \in \mathbf{N} \,;\, m < n\}$ est non vide et $\nu_X(n)=m(X_n)$, le plus petit élément de X_n, puis que cette application *de numérotation croissante* ν_X est bijective.

9) Prouver que $\mu : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}, \mu(2k) = k, \mu(2k + 1) = -(k + 1)$ est bijective.

10) Déduire de **7)**, **8)**, **9)** une bijection explicite de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}$.

11) On note $p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Soit $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})} = \{(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \,;\, v_n \in \mathbf{N}, \text{et il existe} N = N((v_n)_{n\in\mathbf{N}}) \text{ tel que pour } n \geq N, v_n = 0\}$ l'ensemble des suites d'entiers naturels à nombre fini de termes non nuls. Prouver que $\mu : \mathbf{N}^{(\mathbf{N})} \to \mathbf{N}$, l'application définie par $\mu((v_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \prod_{n=0}^{\infty} p_n^{v_n} - 1$ est bijective.

12) A l'aide de **10)** adapter **6)** pour construire une suite $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de fonctions continues convergeant simplement vers la fonction nulle 0, mais telle que la convergence n'est uniforme dans aucun sous-intervalle (à au moins deux points) de $\mathbf{R}$.