TD 3 :

Errata au TD.1

remplacer la première suite d'inégalités dans **5)** b) par

$$9^{-l} \leq \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^{2l} \leq \frac{u_{2l}(\frac{s(n+1)}{n})}{u_{2l}(\frac{s}{n})} \leq u_{2nl}(s) \leq \frac{1}{u_{2l}(-s)} \leq 4^{l}$$

Etude directe de la série $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{\cos(\pi(2l+1)x)}{2l+1}$

1) a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Simplifier l'expression $2\cos(\pi x)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(\pi(2k-1)x)$.
b) Esquisser le graphe de $f_n :]-1/2, 1/2[\rightarrow \mathbf{R}, f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(2\pi n x)}{\cos(\pi x)}$.
c) Soit $x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}[$ calculer $f_n(x) - f_n(x - \frac{1}{2n})$.
En déduire si k est un entier avec $2 \leq k < n$ les majorations

$$0 \leq (-1)^{n+1-k}\int_{\frac{k-2}{2n}}^{\frac{k}{2n}} f_n(t)dt \leq \frac{1}{\cos^2(\pi\frac{k}{2n})}\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{k-2}{2n}}^{\frac{k-1}{2n}}|f_n(t)|dt = \frac{1}{\cos^2(\pi\frac{k}{2n})}\frac{\pi}{2n}\frac{1}{\pi n} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2(\pi\frac{n-k}{2n})}\frac{1}{2n}\frac{1}{n} \leq \frac{n^2}{(n-k)^2}\frac{1}{2n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2(n-k)^2}$$

d) Obtenir de même la minoration $(-1)^{n+1-k}\displaystyle\int_{\frac{k-2}{2n}}^{\frac{k}{2n}} f_n(t)dt \geq \frac{2(k-2)}{\pi^2 n(n-(k-2))^2}$

2) Soit n un entier positif et $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g_n(x) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l \frac{cos(\pi(2l+1)x)}{2l+1}$
a) Calculer $g_n(\frac{1}{2})$, vérifier que g_n est paire, périodique de période 2 et dérivable.
b) Calculer la dérivée $g_n'(x)$, en déduire $g_n'(\frac{1}{2}) = -\pi n$ et si $x - \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}, 2g_n'(x) = \pi f_n(x)$.
c) Tracer les graphes de g_1, g_2, g_3.
d) Prouver que $g_n(0)$ a une limite G quand n tend vers l'infini et $|g_n(0) - G| \leq \frac{1}{2n+3}$.
e) Déduire de **1)** que si $m \in \mathbf{N}$ avec $0 \leq m \leq n-2$ alors
e1) Si $x \in [0, \frac{n-(m+1)}{2n}]$ on a $|g_n(x) - G| \leq \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{8m})$.
e2) Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$ on a $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5\pi}{8}$.
f) En déduire g_n convege vers une fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ que l'on déterminera et
f1) Pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et tout $y \in [0, \frac{1}{2}[$ la convergence est uniforme dans $[p-y, p+y]$.
f2) La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$.

Convergence normale

3) a) Etudier les variations de la fonction $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n(2^n x-1)^2}$, tracer son graphe et déterminer sa norme.
b) La série $\sum f_n$ est-elle normalement convergente sur $\mathbf{R}$?
c) La série $\sum f_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$?

3') Reprendre l'exercice **3)** avec les fonctions $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n^3(nx-1)^2}$

4) Soit $f_n : I \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions croissantes sur un intervalle I.
a) Prouver que si les f_n sont à valeurs dans $[0, +\infty[$ alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si $\sum f_n$ converge normalement sur I.
b) Soit $f_n :]0,1[\to \mathbf{R}, f_{2n}(x) = \frac{n+x}{(n+1)^2}, f_{2n+1}(x) = \frac{2x-1}{n+1}$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$? converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

5) Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_n(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1+n}}$ et $g_n = (-1)^n f_n, h_k = f_{2k} - f_{2k+1}$ et, si $M \geq 0$, on note $g_{M,n} = g_{n|[-M,M]}, h_{M,k} = h_{k|[-M,M]}$ les restrictions de g_n et h_k à $[-M, M]$.
a) Expliciter h_k et prouver que la série $\sum h_{M,k}$ est normalement convergente.
b) Prouver que $g_{M,n}$ tend uniformément vers 0, en déduire que la série $\sum g_{M,n}$ est uniformément convergente. Est-elle normalement convergente?
c) On note $k_n = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) g_{n-k}(x)$, [le terme général du « carré de Cauchy » de $\sum g_n$].
Etablir les minorations $|k_n(x)| \geq (n+1)\frac{x^2+1}{x^2+1+n} \geq 1$.
En déduire que la série $\sum k_n$ ne converge en aucun point de $\mathbf{R}$.

6) a) Rappeler pourquoi pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a la relation $1 + x \leq e^x$.
b) Soit $\sum v_n$ une série réelle convergente et u_n une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|u_{n+1}| \leq |u_n|(1 + v_n)$. Déduire de a) que la suite u_n est bornée.
c) Soit $f_n, g_n : I \to \mathbf{R}$ deux suites telles que la série $\sum g_n$ est normalement convergente et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $f_{n+1} = f_n(1 + g_n)$.
En considérant la série $\sum f_{n+1} - f_n$ associée à la suite f_n, prouver que la suite f_n est uniformément convergente.

6') Soient $f_n, g_n : I \to \mathbf{R}$ deux suites de fonctions sur un intervalle I telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $f_{n+1} = f_n(1 + g_n)$, la série $\sum g_n$ est convergente et la suite f_n converge vers une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. Prouver
a) Il y a un $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\|g_n\| \leq \frac{1}{2}$.
b) Pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in I$ on a

$$1 - g_n(x) + \frac{g_n(x)^2}{2} \leq \frac{1}{1 + g_n(x)} \leq 1 - g_n(x) + 2g_n(x)^2$$

c) Déduire de b) que l'ensemble des points de I où la fonction limite s'annulle est

$$f^{-1}(0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(0) \cup \{x \in I; \sum (g_n(x))^2 \text{ ne converge pas }\}$$

Sommation d'Abel

1') a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Simplifier l'expression $2\cos(\pi x) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos(\pi(2k-1)x)$
b) Soit $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ exprimer $\frac{1+(-1)^{n-1}\cos(2\pi n x)}{\cos(\pi x)}$ en fonction de $y = \frac{1}{2} - x$,
en déduire la majoration $|\frac{1+(-1)^{n-1}\cos(2\pi n x)}{\cos(\pi x)}| \leq 2\min(2\pi^2 y, \frac{2}{y}) = 4\pi n$

2') Retrouver **2)** f) à partir de **1')** et de la sommation d'Abel (version Dirichlet).