TD 2 : convergence uniforme

6) On considère la suite $f_n : J = \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sin(2\pi\sqrt{n^2+x^2})$. Prouver que :
a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ la suite numérique $f_n(x)$ vérifie le critère de Cauchy.
(La suite f_n vérifie-t-elle le critère de Cauchy uniforme?)
b) La suite f_n converge simplement vers 0. (Converge-t-elle uniformément?)
d) La suite f_n est *uniformément équicontinue*[1].

7) Soit $f :]0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$ et $g_n :]0,1] \to]0,1]$, $g_n(t) = \frac{nt+1}{n+1}$ $[= \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\mathrm{t} + \frac{1}{\mathrm{n}+1}1]$.
a) Esquisser le graphe de f. Prouver que f est continue, a-t-elle une limite en 0?
b) Prouver que la suite $f_n = f \circ g_n, t \mapsto \sin(\frac{(n+1)\pi}{nt+1})$ converge simplement vers f.
c) Prouver que chaque f_n a une limite en 0 et calculer cette limite.
d) En déduire que la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme.

8) Soit les suites $f_n, g_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2}{2nx+1}$, $g_n(x) = (f_n(x))^2 - f_n(x)$.
a) Prouver que f_n converge uniformément. Quelle est sa limite?
b) La suite g_n converge-t-elle uniformément? simplement? si oui quelle est la limite?

Convergence uniforme et composition

9) Soient I, J et K trois intervalles réels, $f : J \to K$ une fonction. Prouver que :
a) Si une suite de fonctions $g_n : K \to \mathbf{R}$ converge uniformément vers $g : K \to \mathbf{R}$ alors $g_n \circ f : J \to \mathbf{R}$ converge uniformément vers $g \circ f$.
a') En déduire que si $]a,b[$ est un intervalle ouvert ($a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ admis) il y a des applications $\lambda_-, \lambda_+ :]0,1[\to]a,b[$ telles que $\varphi :]a,b[\to \mathbf{R}$ a une limite en a [resp. b] si et seulement si $\varphi \circ \lambda_+$ [resp. $\varphi \circ \lambda_-$] a une limite en 0 et $\varphi_n :]a,b[\to \mathbf{R}$ est uniformément convergente si et seulement si $\varphi \circ \lambda_\pm :]0,1[\to \mathbf{R}$ est uniformément convergente (penser à « $\mathrm{tg}(\pi t)$ » [ou « $\frac{t}{|2t|-1}$ »).]
b) Si f est uniformément continue[2] et $h_n : I \to J$ est une suite de fonctions qui converge uniformément alors la suite $k_n = f \circ h_n : I \to K$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc converge uniformément. La limite est-elle une fonction de I dans K?
b') Si $J = [a,b], a, b \in \mathbf{R}$ est fermé borné alors la limite h de la suite h_n vérifie $h(I) \subset J$.
b") Si la limite h de la suite h_n vérifie $h(I) \subset J$ alors la limite de $k_n = f \circ h_n$ est $f \circ h : I \to K$.

10) Soit I et J deux intervalles réels et $f_n : I \to \mathbf{R}$, $g_n : J \to I$ deux suites convergeant uniformément vers $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to J$. a) Prouver que si f_n est uniformément équicontinue[3] alors $f_n \circ g_n : J \to \mathbf{R}$ converge uniformément vers $f \circ g$.
b) Soient les suites[4] $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, u_n(s) = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n$ et $l_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}, l_n(y) = n\left(y^{1/n} - 1\right)$
b1) Si $y > 0$ et $s > -n$ vérifier les relation $u_n(l_n(y)) = y$ et $l_n(u_n(s)) = s$.
b2) Prouver directement que $u_n(s)$ et $l_n(y)$ sont uniformément équicontinues sur les intervalles fermés (bornés). En déduire pour tout $y \in]0,+\infty[$ et $s \in \mathbf{R}$ les relations $e^{\log(y)} = y$ et $\log(e^s) = s$.

Continuité (et équicontinuité) uniforme

11) a) Ecrire la négation de (Cf. note [2]) de $f : J \to \mathbf{R}$ est *uniformément continue.*
b) En déduire que si $J = [a,b]$ est un intervalle fermé borné il y a deux suites $x_n, y_n \in J$ convergeant vers le même $x \in J$ et telle que la suite $|x_n - y_n|$ soit minorée par un nombre strictement positif. La fonction f est-elle continue en x?
c) En déduire *une fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.*

12) Soit $f_n : J \to \mathbf{R}$ une suite uniformément convergente vers $f : J \to \mathbf{R}$. Prouver :
a) Si la suite f_n est *uniformément équicontinue*[1] alors f est *uniformément continue*[2].
b) Si $x \in J$ et les f_n sont continues en x alors la suite f_n est *équicontinue*[5] *en* x.
c) Si $J = [a,b]$ est fermé borné et les f_n sont continues alors f_n est uniformément équicontinue[6]

---

[1] *c.a.d.* vérifiant $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbf{N}\ \forall x, y \in J, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon$.

[2] *c.a.d.* si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. $\forall x, y \in J, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

[3] voir la note [1] ci-dessus et **12)**c) : *toute suite uniformément convergente de fonction continues sur un intervalle fermé borné est uniformément équicontinue.*

[4] étudiées en III et IVdu TD1.

[5] note[1] ci-dessus avec $\forall y \in J$ au lieu de $\forall x, y \in J$.

[6] Si pour $n \geq n_0$ on a $\|f_n - f\| \leq \epsilon/3$ déduire de **11)**c) pour f :
$\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x, y \in J, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon/3$ et obtenir, pour les mêmes $n \geq n_0$:
$\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x, y \in J, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon$ conclure par **11)**c) pour les f_n avec $n < n_0$.

Préliminaire au TD 2 : vérification détaillée d'une affirmation du cours

I Trigonométrie

1) Soit $a, b \in \mathbf{R}$. a) Prouver les formules d'addition des fonctions sinus et cosinus :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

a1) En utilisant les formules d'addition de l'exponentielle complexe : pour $u, v \in \mathbf{C}, e^{u+v} = e^u e^v$ et d'Euler : $\sin(t) = \frac{1}{2i}[e^{it} - e^{-it}] = Im(e^{it}),\ \cos(t) = \frac{1}{2}[e^{it} + e^{-it}] = \Re(e^{it})\ [e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)]$.
a2) En vérifiant que l'équation différentielle $f" + f = 0$ est vérifiée par les deux membres (comme fonction de $a \in \mathbf{R}$) des deux formules $[(\sin(a+b) =) f_1(a) = f_2(a), (\cos(a+b) =) f_3(a) = f_4(a)]$ et que $f_1(0) = \sin(b) = f_2(0), f_1'(0) = \cos(b) = f_2'(0)$ et $f_3(0) = \cos(b) = f_4(0), f_3'(0) = -\sin(b) = f_4'(0)$.
a3) En effectuant le produit matriciel $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

b) Déduire de a) les formules de linéarisation exprimant les produits $\sin(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\sin(a+b), \sin(a-b), \cos(a+b), \cos(a-b)$ et les formules de factorisation exprimant $\sin(x) - \sin(y), \sin(x) + \sin(y), \cos(x) - \cos(y)$ et $\cos(x) + \cos(y)$ en fonction des sinus et cosinus du milieu $\frac{x+y}{2}$ et de la demi-différence $\frac{x-y}{2}$ de x et y.

2) a) Prouver que sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, tangente et sinus sont respectivement convexe et concave (Cf. Mat243V).
b) En déduire b1) Si $\alpha < 1$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\alpha\,\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(\alpha x) \geq 0$,
puis que la fonction $f_\alpha :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}, f_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}$ est croissante.
b2) pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ et $1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x) = 1 - 2\sin^2(\frac{x}{2}) > 1 - \frac{1}{2}x^2$.

3) Soit $n = 2m+1$ un entier naturel impair.
En développant $(\cos(t) + i\sin(t))^n$ (et utilisant $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$) prouver qu'il y a un polynôme $P(X) \in \mathbf{Z}[X]$ de degré $n = 2m+1$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\sin(nt) = P(\sin(t))$.
b) Prouver que, si $k \in \mathbf{Z}$ alors $P(\sin(\frac{\pi k}{2m+1})) = 0$ et, pour $-m \leq k \leq m$ les nombres $\sin(\frac{\pi k}{2m+1})$ sont deux à deux distincts. En déduire qu'il y a $c \in \mathbf{R}$ tel que $P(X) = c\,X \prod_{k=1}^{m} \big(1 - \frac{X^2}{\sin^2(\frac{\pi k}{2m+1})}\big)$.
c) En considérant $\lim\limits_{t \to 0} \frac{P(\sin(t))}{t}$ quand t tend vers 0 prouver $c = n$. En déduire pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\sin(\pi x) = (2m+1)\sin(\frac{\pi x}{2m+1}) \prod_{k=1}^{m} \Big(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2m+1})}{\sin^2(\frac{\pi k}{2m+1})}\Big)$$

II Une définition de la fonction sinus

$$\text{On note } p_{a,n}(X) = \frac{2n+1}{\pi}\sin(\frac{\pi a}{2n+1}) \prod_{k=1}^{\min(n,[X])} \Big(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi a}{2n+1})}{\sin^2(\frac{\pi k}{2n+1})}\Big) \text{ et } p_a(X) = a \prod_{k=1}^{[X]} \Big(1 - \frac{a^2}{k^2}\Big)$$

4) On se propose de montrer que la suite de fonctions $p_{a,n} : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ converge uniformément, et uniformément en le paramètre $a \in [-A, A]$, vers la fonction $p_a : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$.
a) Soit $k, n \in \mathbf{N}$. Si $k \leq n$ prouver $\frac{\sin^2(\frac{\pi a}{2n+1})}{\sin^2(\frac{\pi k}{2n+1})} \leq \frac{\pi^2 a^2}{4k^2}$ et $1 - \frac{\pi^2 a^2}{2(2n+1)^2} \leq \frac{2n+1}{\pi a}\sin(\frac{\pi a}{2n+1}) \leq 1$ et,
si $0 < 2k \leq n$, établir l'encadrement $\frac{a^2}{k^2} - \frac{\pi^2 a^4}{k^2(2n+1)^2} \leq \frac{\sin^2(\frac{\pi a}{2n+1})}{\sin^2(\frac{\pi k}{2n+1})} \leq \frac{a^2}{k^2} + 2\frac{\pi^2 a^2}{(2n+1)^2}$
b) Soit $N \in \mathbf{N}$ Déduire de a) que $\Big|(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi a}{2n+1})}{\sin^2(\frac{\pi k}{2n+1})}\Big) - (1 - \frac{a^2}{k^2}\Big)\Big|$ est majoré, si $n \geq k > N$, par $\frac{\pi^2 a^2}{4k^2}$
et si $0 < k \leq N \leq \frac{n}{2}$ par $\frac{\pi^2 a^2(2+a^2)}{(2n+1)^2}$. Conclure en établissant si $A \geq 2,\ a \in [-A, A]$ et $n \geq N$

$$|p_{a,n}(X) - p_a(X)| \leq |a|\Big(\max(1, \frac{\pi|a|}{2})\Big)^{2[\frac{\pi a}{2}]} \frac{\pi^2 a^2(3+a^2)}{4N} \leq (\frac{\pi A}{2})^{\pi A + 5}\frac{1}{N}$$

5) a) Déduire de **3)** et **4)** que la suite $P_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, P_m(a) = a\prod_{k=1}^{m}\Big(1 - \frac{a^2}{k^2}\Big)$ converge vers $a \mapsto \frac{\sin(\pi a)}{\pi}$
et que dans chaque intervalle borné $[-A, A]$ la convergence est uniforme.
b) Vérifier directement le critère de Cauchy uniforme pour la suite $P_{m|} : [-A, A] \to \mathbf{R}$.
c) Etablir directement que si P est la limite de la suite P_m, pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a $P(a+1) = -P(a)$.