TD 1 : Etude directe de suites de fonctions construisant des « fonctions élémentaires »

I Autour de l'identité remarquable $X^{n+1} - Y^{n+1} = (X - Y) \sum_{k=0}^{n} Y^k X^{n-k}$

1) Soit un entier naturel $n \in \mathbf{N}$ Prouver a) l'identité remarquable du titre.
b) La fonction $P_{n+1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, P_{n+1}(t) = t^{n+1}$ est croissante et continue.
c) Prouver [en traitant d'abord le cas $x \geq y (\geq 0)$] pour tous réels x et y positifs ou nuls

$$x^{n+1} - y^{n+1} \leq (x - y)(n + 1)x^n \quad \text{et} \quad x^n(x + (y - x)(n + 1)) \leq y^{n+1}$$

2) Déduire **1)**c)[1]que si $a \in [-1, +\infty[$ (donc $y = 1+a \geq 0$) on a $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

II Une définition de la fonction racine $p^{\text{ième}}$ $R_p = \sqrt[p]{\ } :]0, +\infty \to]0, +\infty[$

3) Soient p un entier positif, $x, r \in]0, +\infty[$ et $s \in \mathbf{R}$ défini par $ps = (p - 1)r + \frac{x}{r^{p-1}}$.
a) Prouver que $0 < s = r(1 + \frac{x-r^p}{pr^p})$. Déduire de **2)** l'inégalité $x \leq s^p$.
b) En déduire que la relation de récurrence $r_{n+1} = \frac{1}{p}((p-1)r_n + \frac{x}{r_n^{p-1}})$ définit, pour tout $r_0 \in]0, +\infty[$ une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ décroissante minorée par un nombre positif.
c) Prouver que la fonction $S = S_{p,x} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[, S(r) = \frac{1}{p}((p - 1)r + \frac{x}{r^{p-1}})$ est continue et déterminer l'ensemble $\{r \in]0, +\infty[\ ; S(r) = r\}$ de ses points fixes.

4) Déduire de **3)** que : a) Il y a une suite de fonction $r_n :]0, +\infty[\to]0, +\infty[, n \in \mathbf{N}$ telle que $r_0(x) = x+1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a la relation $r_{n+1}(x) = S_{p,x}(r_n(x))$.
b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ la suite $(r_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers un nombre positif $R_p(x)$ vérifiant $(R_p(x))^p = x$. On notera $R_p(x) = \sqrt[p]{x} = x^{1/p}$.

III Une définition de la fonction exponentielle $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

Soit $s \in \mathbf{R}, m = \max(1, -[s])$ et pour tout n entier positif $u_n = u_n(s) = (1 + \frac{s}{n})^n$.

5) a) Déduire de **1)**c) (pour $x = 1+\frac{s}{n}$ et $y = 1+\frac{s}{n+1}$) que la suite $(u_n)_{n\geq m}$ est croissante.
b) Soit $t \in \mathbf{R}$ et n, l des entiers positifs avec $-l \leq s, t \leq l$ et $n \geq 2$. Etablir

$$9^{-l} \leq \left(\frac{n - 1}{2n - 1}\right)^{2l} \leq \frac{u_{2l}(\frac{s(n+1)}{n})}{u_{2l}(\frac{s}{n})} \leq u_{2nl}(s) \leq \frac{1}{u_{2l}(-s)} \leq 4^l$$

$$0 \leq u_{2nl}(s + t) - u_{ln}(s)u_{nl}(t) \leq \frac{(s - t)^2}{(2ln)^2}(nl - 1)\frac{u_{2nl}(s + t)}{(1 + \frac{s+t}{2nl})^2} \leq \frac{ln}{(n - 1)^2}u_{2nl}(s + t)$$

6) Déduire de **5)** que la suite $u_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ converge vers une fonction $f : \mathbf{R} \to]0, +\infty[$ vérifiant pour tout $s, t \in \mathbf{R}$ la relation $f(s + t) = f(s)f(t)$.

IV Une définition de la fonction logarithme $\log :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$

Soit $x \in\ ]0, +\infty[$ et pour tout n entier positif $l_n = l_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$

7) a) Vérifier les relations $l_n(\frac{1}{x}) = -l_n(x)\frac{1}{x^{1/n}}$, $x = u_n(l_n(x))$ et, si $x \geq 1, l_n(x) \geq 0$.
b) Déduire de a) et **5)**a) que si $x \geq 1$ la suite $l_n(x)$ est décroissante minorée.
c) Soit $y \in]0, +\infty[$. Vérifier la relation $l_n(xy) - l_n(x) - l_n(y) = l_n(x)(x^{1/n} - 1)$.

8) Déduire de **7)** que la suite $l_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ converge vers une fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ la relation $g(xy) = g(x) + g(y)$.

[1] Cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Bernoulli.*

Suite du TD 1 et compléments

I Autour de l'identité remarquable $X^{n+1} - Y^{n+1} = (X - Y)\sum_{k=0}^{n} Y^k X^{n-k}$

1') a) L'identité remarquable[2] de I a-t-elle lieu pour X et Y deux matrices carrées quelconques? si $c, s, d, t \in \mathbf{R}$, a-t-elle lieu pour les matrices $X = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} d & -t \\ t & d \end{pmatrix}$?
b) Prouver $P_{n+1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, P_{n+1} = t^{n+1}$ est dérivable en calculant directement sa dérivée.

2') Soit Γ_{n+1} le graphe de P_{n+1} et T_1 sa tangente au point $(1, 1)$. a) Pour $n = 1, 2$, tracer la figure et déterminer $\Gamma_{n+1} \cap T_1$. et dans le cas général donner l'équation de T_1. En déduire que :
b) Si n est impair l'inégalité de Bernoulli $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ a lieu pour tout $a \in \mathbf{R}$, sinon elle a lieu pour tout $a \geq -2$. Dans ces deux cas il y a égalité a lieu si et seulement si $na = 0$.
c) -2 est le plus grand réel b tel que pour tout $a \geq b$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a $(1 + a)^{n+1} \geq (n + 1)a$.

II fonction racine $p^{\text{ième}}$ et méthode de Newton.

2") Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ établir $\frac{x-y}{px^{1-1/p}} \leq x^{1/p} - y^{1/p} \leq \frac{x-y}{py^{1-1/p}}$. En déduire que la fonction $R_p, x \mapsto x^{1/p}$ est continue, puis dérivable de dérivée $R'_p(x) = \frac{1}{p}\frac{R_p(x)}{x} = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}$.

3') a) Tracer la graphe Γ_p de P_p $:]0, +\infty[\to \mathbf{R}$. Pour $r \in]0, +\infty[$ donner l'équation de la tangente T_r à Γ_p au point $((r, r^p) \in \Gamma_p)$ d'abscisse r de ce graphe et déterminer le point (s, x) d'intersection de T_r avec la droite horizontale $\{(U, V) \in \mathbf{R}^2; V = x\}$ d'ordonnée x. Vérifier $s = S(r)$.
b) Calculer la dérivée en r de S, vérifier qu'elle est croissante et que $S'(x^{1/p}) = 0$. En déduire :
c) Si $n, m \geq 1$ on a c1): $0 \leq r_{n+1}(x) - x^{1/p} \leq (r_n(x) - x^{1/p})S'(r_n(x)) \leq \frac{p(p-1)}{r_n(x)}(r_n(x) - x^{1/p})^2$
c2) $0 \leq r_{n+m}(x) - x^{1/p} \leq \frac{x}{p(p-1)}\left(\frac{p(p-1)(r_n(x)-x^{1/p})}{x}\right)^{2^m}$, ainsi chaque itération, après n_0 avec $\frac{p(p-1)(r_{n_0}(x)-x^{1/p})}{x} < \frac{1}{10}$ double le nombre de chiffres après la virgule dont on peut être « sûr »!

III fonction exponentielle et méthode d'Euler

2$^{(3)}$) Prouver que la fonction f de **6)** est continue, puis dérivable de dérivée $f' = f$ en établissant pour $n \geq 1$ et $x, y \in]-n, +\infty[$ $(x-y)\frac{n}{n+y}(1+\frac{y}{n})^n \leq (1+\frac{x}{n})^n - (1+\frac{y}{n})^n \leq (x-y)\frac{n}{n+y}(1+\frac{x}{n})^n$

5') a) On considère sur $\mathbf{R}$ le problème de Cauchy $\quad y'(x) = y(x), y(0) = 1 \quad (*)$.
Si $s \in \mathbf{R}$ vérifier $u_n(s) = y_n(s)$, la valeur en s de la solution approchée y_n de $(*)$ obtenue par la méthode d'Euler avec pas $\frac{|s|}{n}$ [on coupe l'intervalle d'extrémités 0 et s en n intervalles égaux].
b) Vérifier que pour $n \geq 1$ et $x > -n$ on a $u'_n(x) = \frac{n}{n+x}u_n(x)$.
En déduire que b1) si $x \in [0, M]$ alors on a $\frac{n}{n+M}u_n(x) \leq u'_n(x) \leq u_n(x)$ puis en déduire [en étudiant les variations des fonctions $f(Kx)f(-Kx), u_n(x)f(-Kx)$ pour $K = 1, \frac{n}{n+M}$],
pour $x \in [0, M]$, l'encadrement : $f(\frac{-M}{n+M}x)f(x) = f(\frac{n}{n+M}x) \leq u_n(x) \leq f(x)$.
b2) si $x \in [-M, 0]$ et $n > M$ alors on a $u_n(x) \leq u'_n(x) \leq \frac{n}{n-M}u_n(x)$ puis en déduire,
pour $x \in [-M, 0]$, l'encadrement $f(\frac{M}{n-M}x)f(x) = f(\frac{n}{n-M}x) \leq u_n(x) \leq f(x)$.

---

[2] une égalité de polynômes à coefficients entiers en deux variables X et Y : elle sera vraie chaque fois que l'on remplace X et Y par des éléments d'un anneau commutatif (par exemple $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$.