Contrôle continu M242
Mars 2007. Durée 2 heures

Questions de cours

1. Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
2. Démontrer que si une série de fonctions converge normalement sur un ensemble X, elle converge alors uniformément sur X.
3. Démontrer qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur X est continue sur X.
4. Enoncer le théorème sur dérivation et convergence uniforme des suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.

Solution.

1. Une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur X si la série numérique $\sum \sup_{x\in I} |f_n|$est convergente.
2. On suppose la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ normalement convergente sur X. La série numérique
$$\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in I} |f_n|$$
est convergente donc de Cauchy. Soit ε un réel strictement positif.
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq n_0,\ p > n \Rightarrow \sum_{k=n}^{p} \sup_{x\in X} |f_k(x)| \leq \varepsilon.$$
Soient n et p deux entiers supérieurs à n_0 vérifiant $p > n$. Alors :
$$\forall x \in X,\ |S_p(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \varepsilon.$$
D'où,
$$\sup_{x\in X} |S_p\,(x) - S_n\,(x)| \leq \varepsilon.$$
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X. Elle est donc uniformément convergente sur X ainsi que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$.
3. Soit ε un réel strictement positif. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente sur X, choisissons un entier naturel N vérifiant,
$$\forall x \in I,\ |f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Soit x_0 un élément de X. L'application f_N étant continue en x_0, choisissons un réel α strictement positif vérifiant :
$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I, \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon.$$
Ainsi,
$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I,$$
$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|\\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$
L'application f est continue en tout point x_0 de X donc sur X.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On suppose que :
   il existe un élément x_0 de I tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;
   la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.
   Alors :
   la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant
$$f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$
   Si l'intervalle I est borné, la convergence est uniforme.

■

Exercice 1 *Pour tout entier $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie par :*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(n+x)} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$.*
2. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.*
3. *Déduire de la question précédente que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
4. *Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, on a :*
$$\frac{p}{n(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$
5. *Calculer $F(p)$ pour tout entier p.*
6. *Déduire des questions **3** et **5**, que*
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$
7. *Montrer que*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$
   [[On pourra montrer que la série de fonctions
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$$
   converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et appliquer le théorème d'interversion des limites.]]

Solution.

1. Avec $|f_n(x)| \leq \dfrac{x}{n^2}$, on déduit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Avec $|f'_n(x)| = \dfrac{1}{(n+x)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, on déduit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Un théorème du cours nous dit que F est $\mathcal{C}^1$ avec $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0$. Donc F est croissante. On peut aussi remarquer que F est croissante parcque les f_n le sont.
4. On a :
$$\frac{p}{n(n+p)} = \frac{p+n-n}{n(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$
5. Pour $n > p$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} f_k(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}$$
avec :
$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \frac{p}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
et donc :
$$F(p) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$
6. De F croissante et $\lim_{p\to+\infty} F(p) = +\infty$, on déduit que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
7. On a $F(p) \underset{p\to+\infty}{\backsim} \ln(p)$, donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{F(p)}{p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{\ln(p)}{p} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ puisque $\frac{F(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{+,\cdot}$.
Autrement, suivre l'indication.

■

Exercice 2 *Montrer que si la fonction f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes alors f est un polynôme.*

Solution. Si la fonction f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes alors cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme, c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier naturel n_0 tel que :
$$\forall n > m \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon.$$
En particulier, on a :
$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_{n_0}(x)| < \varepsilon,$$
c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_0$ le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$, il est donc constant. Il existe donc une suite de réels $(c_n)_{n\geq n_0}$ telle que :
$$\forall n \geq n_0,\ P_n = P_{n_0} + c_n.$$
La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(0)$, on déduit que la suite $(c_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $f(0) - P_{n_0}(0)$ et pour tout réel x, on a :
$$f(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} P_n(x) = P_{n_0}(x) + \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} c_n = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0).$$
La fonction f est donc bien polynomiale. ■

Exercice 3 *On désigne par* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des coefficients qui interviennent dans le développement en série entière de la fonction* $x \mapsto \sqrt{1-x}$ *sur l'intervalle* $]-1,1[$, *soit :*

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Les coefficients a_n *sont donnés par* $a_0 = 1$ *et pour* $n \geq 1$, $a_n = -\alpha_n$ *avec :*

$$\alpha_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)\left(2^n n!\right)^2}.$$

1. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *est convergente.*
2. *En déduire que :*
   (a) *la fonction* $x \mapsto \sqrt{1-x}$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle* $[-1,1]$ *;*
   (b) *pour tout réel* $\alpha \in [0,1]$ *les fonctions* $x \mapsto |x-\alpha|$ *et* $x \mapsto (x-\alpha)^+ = \max(0, x-\alpha)$ *sont limites uniformes de suites de polynômes sur l'intervalle* $[0,1]$ *;*
   (c) *toute fonction continue et affine par morceaux sur* $[0,1]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes sur cet intervalle.*
3. *Montrer que toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux.*
4. *En déduire le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Solution. Les coefficients a_n sont donnés par $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = -\alpha_n$ avec :

$$\alpha_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)\left(2^n n!\right)^2}.$$

En particuliers, les α_n sont positifs pour tout $n \geq 1$.

1. Pour tout x dans $[0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a :

   $$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n = 1 - \sqrt{1-x}.$$

   En faisant tendre x vers 1, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a :

   $$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leq 1,$$

   ce qui implique la convergence de la série à termes positifs $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ et celle de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.
   (a) Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [-1,1]$, on a :

   $$\left|\sqrt{1-x} - P_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k,$$

   ce qui implique la convergence uniforme sur $[-1,1]$ de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

(b) Pour tout x dans $[0, 1]$, on peut écrire que $|x - \alpha| = \sqrt{1 - u(x)}$ avec $u(x) = 1 - (x - \alpha)^2$ dans $[0, 1]$ et on a :

$$|x - \alpha| = \lim_{n \to +\infty} P_n(u(x))$$

cette convergence étant uniforme.

En écrivant que $(x - \alpha)^+ = \frac{1}{2}(|x - \alpha| + x - \alpha)$, on déduit que cette fonction est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0, 1]$.

(c) Si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ est affine par morceaux, il existe une suite $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$ strictement croissante dans $[0, 1]$ telle que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_p = 1$ et f est affine sur chacun des intervalles $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ pour k compris entre 1 et $p - 1$. On peut alors trouver des coefficients $(\beta_k)_{0 \leq k \leq p}$ tels que $f(x) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_k (x - \alpha_k)^+$ ($x = 0$ donne $\beta_0 = f(0)$, $x = \alpha_2$ donne $\beta_0 + \beta_1(\alpha_2 - \alpha_1)$ et ainsi de suite, on détermine les β_k de manière unique). Par linéarité, on en déduit de la question précédente que f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0, 1]$.

3. La fonction f continue sur le compact $[0, 1]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[0, 1]$ sont tels que $|x - y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

   Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une subdivision de $[0, 1]$ en notant :

$$x_k = \frac{k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

   et on lui associe la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \; f_n(x) = f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(f(x_{k+1}) - f(x_k))$$

   où k est compris entre 0 et $n - 1$. Cette fonction est affine par morceaux et continue sur $[0, 1]$.

   Pour tout entier $n \geq \frac{1}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n - 1$ on a alors $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n} \leq \eta$.

   Sachant qu'un réel $x \in [0, 1]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \frac{1}{\eta}$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) - f(x_k) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\
&\leq \varepsilon + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \varepsilon \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

   ce qui prouve la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f.

4. Si f est continue sur $[0, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g continue et affine par morceaux telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. En prenant $P \in \mathbb{R}[x]$ telle $\|P - g\|_\infty < \varepsilon$, on déduit de l'inégalité triangulaire que $\|f - P\|_\infty < 2\varepsilon$. Le théorème de Weierstrass est donc démontré sur $[0, 1]$. Un changement de variable affine nous permet d'obtenir le résultat sur n'importe quel intervalle $[a, b]$.

■