27/02/2007

def: $f_n :]a,b[\to \mathbb{C}$ converge uniformément sur les intervalles fermés si pour tout $a < c < d < b$ $f_n|_{[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{C}$ converge uniformément. ($a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ permis)

Remarque En ce cas il y a $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ tq pour tout $a<c<d<b$ $f_n|_{[c,d]} \to \mathbb{C}$ converge uniformément vers $f| : [c,d] \to \mathbb{C}$

Théorème Soit $f_n :]a,b[\to \mathbb{C}$ Riemann intégrable et convergent uniformément sur les intervalles fermés vers $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ et $g :]a,b[\to [0,+\infty[$ tq (i) l'intégrale généralisée $\int_a^b g < +\infty$
(ii) $\forall t \in]a,b[\quad |f_n(t)| \leq g(t)$
Alors les intégrales généralisées $\int_a^b f_n$ et $\int_a^b f$ convergent absolument et

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

preuve pour tout $\varepsilon > 0$ il y a $a < c_\varepsilon < d_\varepsilon < b$ tq

$$\int_a^{a_\varepsilon} g, \int_{b_\varepsilon}^b g \leq \varepsilon$$

donc pour tout $a < a' \leq a'' \leq a_\varepsilon$ $b_\varepsilon \leq b' < b'' < b$ on a

$$\int_{a'}^{a''} |f_n| \leq \int_{a'}^{a''} g \leq \int_a^{a_\varepsilon} g < \varepsilon \text{ et } \int_{b'}^{b''} |f_n| \leq \int_{b'}^{b''} g < \int_{b_\varepsilon}^{b} g \leq \varepsilon$$

les intégrales généralisées $\int_a^b f_n$ vérifient le critère de Cauchy absolument donc converge absolument.

de même

$$\int_{a'}^{a''}|f| = \lim_{n\to\infty}\int_{a'}^{a''}|f_n| \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{b'}^{b''}|f| = \lim_{n\to\infty}\int_{b'}^{b''}|f_n| \le \varepsilon$$

donc $\int_a^b f$ converge aussi absolument.

$$\exists N \text{ tq } \forall n \ge n_0 \left| \int_{a_{\varepsilon/5}}^{b_{\varepsilon/5}} f_n - \int_{a_{\varepsilon/5}}^{b_{\varepsilon/5}} f \right| \le \varepsilon/5$$

donc

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^{a_{\varepsilon/5}} f_n + \int_{a_{\varepsilon/5}}^{b_{\varepsilon/5}} f_n + \int_{b_{\varepsilon/5}}^{b} f_n - \left[\int_a^{a_{\varepsilon/5}} f + \int_{a_{\varepsilon/5}}^{b_{\varepsilon/5}} f_n + \int_{b_{\varepsilon/5}}^{b} f_n\right]\right|$$

$$\le \int_a^{a_{\varepsilon/5}} |f_n| + \left|\int_{a_{\varepsilon/5}}^{b_{\varepsilon/5}} f_n - f\right| + \int_{b_{\varepsilon/5}}^{b} |f_n| + \int_a^{a_{\varepsilon/5}} |f| + \int_{b_{\varepsilon/5}}^{b} |f|$$

$$\le \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 = \varepsilon$$

$\square$

Exemple $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) \equiv |x-n| e^{-(x-n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ unif^t sur les compact

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = 2\int_n^{+\infty}(x-n)e^{-(x-n)^2} = 1$$

(Exercice)

mais si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $|f_n(t)| \le g(t)$

alors $\forall t \ge 0$ $g(t) \ge e^{-1/4}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} g = +\infty$

Le théorème de la moyenne

Rappels A ① un ensemble D est au plus dénombrable s'il y a une injection $\varphi : D \to \mathbb{N}$

② Si D est au plus dénombrable et $\pi : D \to D'$ surjective, alors D' est au plus dénombrable.

pv $\varphi : D \to \mathbb{N}$ $\quad \varphi'(d') = \min\{\varphi(d) \,;\, \pi(d) = d'\}$ est injective. □

③ Comme $\psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(m,n) = 2^m \times 3^n$ ~~est~~ injective,

(1) Un produit $D\times D'$ d'ens. au plus dénombrables est au plus dénombrable

(2) Une union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ ~~dénombrable~~

pv (1) $\psi\circ(\varphi\times\varphi') : D\times D' \to \mathbb{N}$ est injective

$$\begin{tikzcd} D\times D' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\times\varphi'"'] & \mathbb{N} \\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $$\begin{tikzcd} \left\{(x,n) \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right)\times\mathbb{N} \;\middle|\; x \in D_n\right\} \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"] & \mathbb{N} \quad (x,n) \mapsto \psi(\varphi_n(x), n)) \text{ inj} \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n & \end{tikzcd}$$

surjective donc par (2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ au plus dénombrable □

B Soit I un intervalle réel, E un espace vectoriel réel normé.

$f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$ de vecteur dérivé $f'(t_0) \in E$

si $f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + o(|t-t_0|)$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. $\forall t \in I \ |t-t_0| < \delta \quad \|f(t)-f(t_0)-(t-t_0)f'(t_0)\| < \varepsilon|t-t_0|$

Rmq cela équivaut à $\displaystyle \lim_{I\setminus\{t_0\}\ni t \to t_0} \frac{1}{t-t_0}\left(f(t)-f(t_0)\right) = f'(t_0)$

existe et vaut

<u>Théorème de la moyenne</u> Soit $I=[\alpha,\beta]\supset D$ au plus dénombrable ($\varphi : D \to \mathbb{N}$ injective)

E e.v. normé $f : I \to E$, $g : I \to \mathbb{R}$ continues t.q. $\forall \xi \in I \setminus D$

(1) f et g sont dérivables en ξ (2) $\|f'(\xi)\| \leq g'(\xi)$

Alors $\|f(\beta)-f(\alpha)\| \leq g(\beta)-g(\alpha)$

pv: Il suffit de montrer $\forall \varepsilon > 0$ $\|f(\beta)-f(\alpha)\| \leq g(\beta)-g(\alpha)+\varepsilon(\beta-\alpha+2)$

Soit $X=\{x\in[\alpha,\beta] \mid \|f(x)-f(\alpha)\| \leq g(x)-g(\alpha)+\varepsilon(x-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,x[} 2^{-\varphi(d)})\}$

Comme $\sum_{d\in D} 2^{-\varphi(d)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}=2$ il suffit de montrer $\beta\in X$

$\alpha\in X$ donc $X\neq\emptyset$ et comme $\|f-f(\alpha)\|$, g, $x\mapsto\varepsilon(x-\alpha)$ sont continues et $x\mapsto\sum_{d\in D\cap[\alpha,x[} 2^{-\varphi(d)}$ ↗

$\operatorname{Sup}(X)\in X$ il suffit donc de montrer $\operatorname{Sup}X=\beta$: Si $X\ni x<\beta$ $\exists y\in X$ $x<y$:

Soit $x\in D$ comme $f, g, x\mapsto\varepsilon(x-\alpha)$ sont continues il y a $x<y\leq\beta$ t.q.

$$\forall t\in[x,y] \quad \|f(t)-f(x)\| \leq g(t)-g(x)+\varepsilon(t-x)+\varepsilon 2^{-\varphi(x)}$$

d'où $\|f(y)-f(\alpha)\| \leq \|f(y)-f(x)\|+\|f(x)-f(\alpha)\| \leq g(t)-g(x)+\varepsilon(t-x+2^{-\varphi(x)})+g(x)-g(\alpha)+\varepsilon(x-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,x[} 2^{-\varphi(d)})$

$=g(y)-g(\alpha)+\varepsilon(y-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,x]} 2^{-\varphi(d)}) \leq g(y)-g(\alpha)+\varepsilon(y-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,y[} 2^{-\varphi(d)})$

Si $x\in I\setminus D$ $\exists y$ $x<y\leq\beta$ tq $\forall t\in[x,y]$ $\begin{cases} \|f(t)-f(x)\| \leq (t-x)\|f'(x)\|+\varepsilon/2\,(t-x) \\ g(t)-g(x) \geq (t-x)g'(x)-\varepsilon/2\,(t-x) \end{cases}$

d'où $\|f(y)-f(x)\| \leq (t-x)g'(x)+\varepsilon/2\,(t-x) \leq g(t)-g(x)+\varepsilon/2\,(t-x)+\varepsilon/2\,(t-x)$

et $\|f(y)-f(\alpha)\| \leq \|f(y)-f(x)\|+\|f(x)-f(\alpha)\| \leq g(y)-g(x)+\varepsilon(t-x)+g(x)-g(\alpha)+\varepsilon(x-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,x[} 2^{-\varphi(d)})$

$=g(y)-g(\alpha)+\varepsilon(y-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,x]} 2^{-\varphi(d)}) \leq g(y)-g(\alpha)+\varepsilon(y-\alpha+\sum_{d\in D\cap[\alpha,y[} 2^{-\varphi(d)})$

Dans les deux cas $y\in X$ et $y>x$. ▭

Soit J un intervalle réel $D \subset J$ dénombrable

Corollaire 1 Soit $h : J \to \mathbb{R}$ continue tq $\forall \xi \in J \setminus D$ g est dérivable en ξ et $h'(\xi) \geq 0$

Alors h est croissante

pv $\forall \alpha, \beta \in J$ $\alpha \leq \beta$ $f = 0 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $g = h_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Le thm donne

$0 \leq \| f(\beta) - f(\alpha) \| \leq g(\beta) - g(\alpha)$ donc $g(\alpha) \leq g(\beta)$.

Corollaire 2 Soit E un e.v. normé et k $J \to E$, $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall \xi \in J \setminus D$ k dérivable en ξ et $\|k'(\xi)\| \leq M$

Alors $\forall \alpha, \beta \in J$ $\quad \|k(\beta) - k(\alpha)\| \leq M|\beta - \alpha|$

pv: α, β. $\alpha \leq \beta$ $\quad f = k_1 : [\alpha, \beta] \to E$, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $g(x) = M(x - \alpha)$

$\forall \xi \in J$ g dérivable en ξ et $g'(x) = M$ donc $\forall \xi \in [\alpha, \beta] \setminus D$, $\|f'(\xi)\| \leq g'(\xi)$

Le thm donne $\|k(\beta) - k(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha) - M.0 = M|\beta - \alpha|$. □

Co-corollaire Soit E un e.v. normé et $k : J \to E$ tq $\forall \xi \in J \setminus D$ k dérivable en ξ et $k'(\xi) = 0$

Alors k est constante. □

Corollaire 3 Soit E ev normé de dim. finie. I intervalle réel et $\forall n \in \mathbb{N}$

$D_n \subset I$ dénombrable, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ et $f_n : I \to E$ dérivable sur $I \setminus D_n$ et tq

(1) $\exists a \in I$ tq $f_n(a)$ converge quand $n \to \infty$

(2) $\forall \xi \in I \setminus D$ $\quad f'_n(\xi) \to g(\xi)$ uniformément

Alors (1) $f_n \to f : I \to E$ et $\forall \alpha \leq \beta \in I$ la convergence est uniforme sur $[\alpha, \beta]$

(2) $\forall \xi \in I \setminus D$, f est dérivable en ξ et $f'(\xi) = g(\xi)$

pr. o.p.s. $\alpha \leq a \leq \beta$ et, en prenant une base de E, raisonner coordonnée par coordonnée, $E = \mathbb{R}$.

(1) Soit $\varepsilon > 0$ et N tq $\forall m, n \geq N$ $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon/3$ (*)

$\forall \xi \in I \setminus D$ $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \leq \frac{\varepsilon/3}{(|\beta-\alpha|+1)} \leq \varepsilon/3$ (**)

par (**) et car 2 $\forall x, y \in I$ on a

$$\left|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))\right| \leq \frac{\varepsilon/3}{(|\beta-\alpha|+1)} |x-y| \quad (3)$$

d'où en faisant $m \to \infty$

$$\left|f_n(x) - f_n(y) - (f(x) - f(y))\right| \leq \varepsilon/3 \, |x-y| \quad (4)$$

d'où (en faisant $y = a$ et $y \in [\alpha, \beta]$ ds (3))

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(a) - f_m(a)| + \frac{\varepsilon/3}{(|\beta-\alpha|+1)} |x-y| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \leq \varepsilon$$

f_n vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \beta]$ donc converge.

(2) Soit $\xi \in I \setminus D$ $n \geq N$ et σ tq $\forall x \in I$ $|x - \xi| \leq \sigma$

$$\left|f_n(x) - f_n(\xi) - (x-\xi) f_n'(\xi)\right| \leq \varepsilon/3 \, |x-\xi|$$

$$\left|f(x) - f(\xi) - (x-\xi) g(\xi)\right| \leq \left|f(x) - f(\xi) - (f_n(x) - f_n(\xi))\right| \leq \varepsilon/3 \, |x-\xi|$$

$$+ \left|f_n(x) - f_n(\xi) - (x-\xi) f_n'(\xi)\right| \leq \varepsilon/3 \, |x-\xi|$$

$$+ \left|(x-\xi)(f_n'(\xi) - g(\xi))\right| \leq \varepsilon/3 \, |x-\xi|$$

$\leq \varepsilon |x-\xi|$ donc f dérivable en ξ et $f'(\xi) = g(\xi)$. $\square$

<u>Compliment</u> Soit $f, g : I \to E$ continues et $D \subset I$ dénombrable t.q.

$\forall \xi \in I \setminus D$ f dérivable en ξ et $f'(\xi) = g(\xi)$

Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I$ $f'(x) = g(x)$

p.v : Soit $x_0 \in I$ $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ t.q. $\forall x \in I$ $|x - x_0| \leq \delta$ $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$

$h : I \to E$ $h(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) g(x_0)$

$\forall \xi \in I \setminus D$ h est dérivable en ξ et $h'(x) = f'(x) - g(x_0) = g(x) - g(x_0)$

donc (car 2) $\forall x, y \in I$ $|x - x_0|, |y - y_0| \leq \delta$ $|h(x) - h(y)| \leq \varepsilon |x - y|$

soit (en prenant $y = x_0$, $h(x_0) = 0$)

$$\left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0) g(x_0) \right| \leq \varepsilon |x - x_0| \quad . \square$$

Primitives

<u>def</u> $f : I \to E$ une primitive de f est $F : I \to E$ t.q.

F est continue et il y a $D \subset I$ au plus dénombrable t.q.

$\forall \xi \in I \setminus D$ F est dérivable en ξ et $F'(\xi) = f(\xi)$

<u>Exemple</u> $I = [a, b]$ $f : I \to E$ en escalier ($a = t_0 < \dots < t_N = b$ t.q.

$i = 1, \dots, N$ $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ $f(t) = f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)$

$F : I \to E$ $F(a) = 0$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $F(t) = F(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)$
est une primitive de f.

<u>Corollaire</u> $f : [a, b] \to E$ <u>réglée</u> (c.a.d limite uniforme de fonctions en escalier)
(de cor 3 et cor (car 2))
admet une unique primitive $F : [a, b] \to E$ t.q. $F(a) = 0$.
$\square$