13/02/2007

Séries produits terme à terme $\sum u_n v_n$

1 Sommation d'Abel

Proposition $n \in \mathbb{N}$, $u_n, v_n \in \mathbb{C}$ $M, N \in \mathbb{N}$ $V_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$, $V_{-1} = 0$, $V_{M,N} = \sum_{n=M}^{N} v_n = \begin{cases} 0 \text{ si } N < M \\ V_N - V_M \text{ si } M < N \end{cases}$

$$\sum_{n=M}^{N} u_n v_n = u_{N+1} V_{M,N} - \sum_{n=M}^{N} (u_{n+1} - u_n) V_{M,n}$$

$$\text{pv} \sum_{n=M}^{N} u_n v_n = \sum_{n=M}^{N} u_n (V_{M,n} - V_{M,n-1}) = \sum_{n=M}^{N} u_n V_{M,n} - \sum_{n=M}^{N} u_n V_{M,n-1}$$

$$= \sum_{n=M}^{N} u_n V_{M,n} - \sum_{l=M-1}^{N-1} u_{l+1} V_{M,l} = \sum_{n=M}^{N} (u_n - u_{n+1}) V_{M,n} + u_{N+1} V_{M,N}$$

□

Corollaire Soit $u_n, v_n : X \times I \to \mathbb{C}$ des suites de fonctions dépendant d'un paramètre $x \in X$ telles que

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n|$ converge uniformément (par exemple normalement) et

Soit (Dirichlet) (1) $u_n \to 0$ (2) V_N est borné ($\exists K$ tq $\forall N$ $|V_N| \leq K$)

Soit (Abel) $\sum v_n$ converge uniformément et u_0 borné

Alors $\sum u_n v_n$ converge uniformément.

pv critère de Cauchy uniforme. Dans les deux cas

$\exists K > 0$ tq $\forall M, N \in \mathbb{N}$ $|V_{M,N}| \leq K$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_0$ tq $\forall N_0 \leq M \leq N$ $\sum_{n=M}^{N} |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon / 2K$

cas (1) $\exists N_0\ \forall N \geq M \geq N_1\ |u_{N+1}| \leq \varepsilon/_{2K} \Rightarrow |u_{M+1} V_{MN}| \leq \varepsilon/2$

donc $N, M \geq N_0 N_1$ $\left|\sum_{n=M}^{N} u_n v_n\right| \leq \varepsilon/2 + \sum_{n=M}^{N} |u_{n+1} - u_n| |V_{M,N}| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/_{2K} K = \varepsilon$

cas (2) $\exists K_1\ \forall N\ |u_{N+1}| \leq K_1$

$\exists N_1\ \forall N \geq M \geq N_1\quad |V_{M,N}| \leq \varepsilon/K_1$

donc $\forall N, M \geq N_0, N_1$ $\left|\sum_{n=M}^{N} u_n v_n\right| \leq K_1\ \varepsilon/K_1 + \sum_{n=M}^{N} |u_{n+1} - u_n| |V_{M,N}| \leq \varepsilon$ $\square$

<u>Lemme</u> $\theta \in]0, 2\pi[$ $\quad \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = e^{i\frac{N}{2}\theta} \dfrac{\sin(\frac{N+1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$

pv $\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{N} (e^{i\theta})^n = \dfrac{(e^{i\theta})^{N+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} =$

$= \dfrac{e^{i\frac{N+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \dfrac{e^{i\frac{N+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{(N+1)}{2}\theta}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = e^{i\frac{N\theta}{2}} \dfrac{\sin\frac{N+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

<u>corollaire</u> si $\delta < \pi$ et $\theta \in]\delta, 2\pi - \delta[$

$$\left|\sum_{k=M}^{N} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{\pi}{2\delta}$$

pv $\left|\sum_{k=M}^{N} e^{ik\theta}\right| = \left|e^{iM\theta} \sum_{n=0}^{N-M} e^{in\theta}\right| = \left|e^{iM\theta} e^{i\frac{N-M}{2}\theta} \dfrac{\sin\frac{N-M+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|$

$= \left|e^{i\frac{N+M}{2}\theta} \dfrac{\sin\frac{N-M+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \leq \dfrac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|} \leq \dfrac{1}{\frac{2}{\pi}\delta}$ $\square$

car

Corollaire Soit $a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_n \to 0$ et $\sum |a_{n+1} - a_n| < \infty$ et $\delta \in]0, \pi[$

alors (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ converge uniformément sur $]\delta, 2\pi - \delta[$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément dans

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \ z = |z| e^{i\theta} \ \theta \in]\delta, 2\pi - \delta[\}$$

$\square$

2 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder

Rappel (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$

$$\left| \sum_{n=M}^{N} a_n b_n \right| \leq \sum_{n=M}^{N} |a_n| |b_n| \leq \left(\sum_{n=M}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=M}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}$$

Corollaire Soit $u_n, v_n : I \to \mathbb{C}$ tq les séries $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ sont normalement convergentes alors $\sum u_n v_n$ est normalement convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 \right)^{1/2}$$

Théorème (inégalité de Hölder) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

et pour $i = 1, \dots, k$ $a_{in} \in \mathbb{C}$ alors

$$\sum_{n=M}^{N} \left| \prod_{i=1}^{k} a_{in} \right| \leq \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i}$$

pv ① On peut supposer $1 \leq i \leq k$ $n \geq 0$ $a_{in} \neq 0$

(quitte à prendre la sous suite $a_{i\,v(k)}$

tq $\nexists k$ tq $n = v(k)$ ssi $\exists\, 1 \leq i \leq k$ tq $a_{in} = 0$)

② Soit $v_{i,n} \in \mathbb{R}$ tq $e^{v_{i,n}} = \dfrac{|a_{in}|^{1/\alpha_i}}{\left(\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i} \right)}$

Comme $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe on a

$$e^{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_{in}} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e^{v_{i,n}}$$

$$\|$$

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{|a_{in}|}{\left(\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i}} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{|a_{in}|^{1/\alpha_i}}{\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i}}$$

d'où $$\sum_{n=M}^{N} \prod_{i=1}^{k} \frac{|a_{in}|}{\left(\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i}} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i}}{\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

donc $$\sum_{n=M}^{N} \prod_{i=1}^{k} |a_{in}| \leq \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{n=M}^{N} |a_{in}|^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i}$$ $\square$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0,1]$; $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

Corollaire pour $1 \le i \le k$ Soit $a_{in} : X \times I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions sur I dépendant du paramètre x t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_{in}\|^{1/\alpha_i} < \infty$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} a_{in}$ est normalement convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \prod_{i=1}^{k} a_{in} \right\| \le \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_{in}\|^{1/\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \qquad \square$$

Intégration et suites de fonctions

1 Rappel sur l'intégrale de Riemann.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé borné.

L'espace vectoriel $\mathcal{B}(I) = \{ v : I \to \mathbb{R} \mid \|v\| < +\infty \}$ fonctions réelles bornées contient les sous-ev

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(I) \supset R_i(I) &= \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ Riemann intégrable} \} \\
&\cup \\
R_e(I) &= \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ réglée (limite uniforme de fct en escalier)} \} \\
&\cup \\
\mathcal{C}_m(I) &= \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue par morceaux} \} \\
&\cup \\
\mathcal{C}(I) &= \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue} \}
\end{aligned}$$

$\mathcal{I} : R_i(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire tq

(1) ~~Si~~ $\forall t \in I \; f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$

(2) $a < b < c$ $\quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

(3) $\int_a^b 1 = b - a$

<u>Corollaire</u> (1) Si $f, g \in R_i(I)$ $\forall t \in I$ $f(t) \leq g(t)$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

(2) Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est en escalier $[a = t_0 < t_1 \dots < t_N = b$ tq $\forall t \in]t_{i-1}, t_i[\; \varphi(t) = \varphi\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)]$

alors $\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)(t_i - t_{i-1})$

<u>def</u> f est Riemann intégrable si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \varphi, \psi \in R_e(I)$ tq ① $\forall t \in I \quad \varphi(t) \leq f(t) \leq \psi(t)$

② $\int_a^b \psi(t) - \varphi(t) \leq \varepsilon$

<u>Lemme</u> Si $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ sont comme ds la def alors $\int_a^b \varphi_\varepsilon$ et $\int_a^b \psi_\varepsilon$ ont une limite, la même $\int_a^b f$.

<u>def</u> $f = u + iv : I \to \mathbb{C}$ est Riemann intégrable ssi $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$ sont Riemann intégrable et

$$\int_a^b f = \int_a^b u + \int_a^b v$$

On note $R_{\mathbb{C}}(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} /$ intégrable Riemann$\}$

<u>Exerce</u> C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $J : R_{\mathbb{C}}(I) \to \mathbb{C}$ $f \mapsto \int_a^b f$ est $\mathbb{C}$ linéaire

<u>Lemme</u> Si f est Riemann intégrable alors $|f|$ est Riemann intégrable alors

et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

pv Soit $\alpha = e^{i\theta}$ tq $\alpha \int_a^b f \in [0, +\infty[$

on a $\left| \int_a^b f \right| = \left| \alpha \int_a^b f \right| = \alpha \int_a^b f = \int_a^b \alpha f = \int_a^b \mathrm{Re}(\alpha f) \leq \int_a^b |\alpha f| = \int_a^b |f|$ $\square$

car $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f \in \mathbb{R}$ car $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

<u>Théorème</u> Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ Riemann intégrables tq $f_n \xrightarrow[u]{} f$ Alors f est Riemann intégrable et

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n$$

pv suffit le cas $f : I \to \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$ et N tq $n \geq N$ $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/3(b-a)$

Soit φ, ψ en escalier tq $\forall t \in I$ $\varphi(t) \leq f_N(t) \leq \psi(t)$
et $\int_a^b \psi - \varphi \leq \varepsilon/3$

alors $\forall n \geq N$ $\forall t \in I$ $\varphi(t) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f_n(t) \leq \psi(t) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

donc en faisant $n \to \infty$

$$\varphi(t) - \varepsilon/3(b-a) \leq f(t) \leq \psi(t) + \varepsilon/3(b-a)$$

$\varphi - \varepsilon/3(b-a)$ et $\psi + \varepsilon/3(b-a)$ sont en escalier et

$$\int_a^b \psi + \varepsilon/3(b-a) - \left(\varphi - \varepsilon/3(b-a)\right) = \int_a^b \psi - \varphi + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \leq \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

donc f est intégrable Riemann et

$$-\varepsilon \leq \int_a^b \varphi - \varepsilon/3(b-a) - \int_a^b \psi + \varepsilon/3(b-a) \leq \int_a^b f_n - \int_a^b f \leq \int_a^b \psi(t) + \varepsilon/3(b-a) - \int_a^b \varphi(t) - \varepsilon/3(b-a) \leq \varepsilon$$

$\square$

<u>Corollaire</u> Soit $u_n : I \to \mathbb{C}$ intégrables Riemann tq $\sum u_n$ converge uniformément, alors $\sum u_n$ est intégrable Riemann et $\int_a^b \sum u_n = \sum \int_a^b u_n$ $\boxtimes$

Exemples ① $f_n(x) = (n+2)(n+1)x^n(1-x) : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\forall t \in [0,1]$ on a $f_n(t) \to 0$

$$\int_0^1 f_n = \Big[(n+2)x^{n+1}(1-x)\Big]_0^1 + \int_0^1 (n+2)x^{n+1} = \Big[x^{n+2}\Big]_0^1 = 1$$

donc $\int_0^1 f_n \not\to \int_0^1 0$

et f_n ne converge pas uniformément vers 0

② Soit $r \in]0,1[$ $\quad x \in [-r, r]$ $\quad \frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$

la convergence est normale

$$\int_0^x (-1)^n t^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int_0^x \frac{1}{1+t} = \log(1+x)$$

donc $\forall x \in [-r, r]$ $\quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

Et par sommation d'Abel on peut faire tendre x vers 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \operatorname{Log} 2$$

③ $\forall x \in [-r, r]$ $\quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

donc $\operatorname{Arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

et de même $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg} 1 = \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$