06/02/2007

Convergence normale

1 Définitions

une série de fcts $\sum f_n : I \to \mathbb{C}$ sur un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$

converge normalement si il y a $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ f_n est bornée et

def1 La série $\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|$ de ses normes pour $n \geq n_0$ converge

def2 Il y a une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ $\varepsilon_n \geq 0$ tq

(1) $\forall x \in I$ $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x)| \leq \varepsilon_n$

(2) $\sum_{n \geq n_0} \varepsilon_n < +\infty$

2 Rappel sur les suites à termes (après un certain rang) ≥ 0

a) Si $\forall n \geq n_0$ $\varepsilon_n \geq 0$ alors $\left(\sum_{n=n_0+1}^{N} \varepsilon_n\right)_{N \geq n_0}$ est $\nearrow$ donc converge

soit vers $s \in [0, +\infty[$ et $\sum \varepsilon_n$ cv $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n = \sum_{n=0}^{n_0} \varepsilon_n + s$

soit vers $+\infty$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n = +\infty$

b) Si $\forall n > n_0$ $0 \leq \delta_n \leq \varepsilon_n$ et $\sum_{n > n_0} \varepsilon_n < +\infty$

alors $\sum_{n > n_0} \delta_n < +\infty$

pv $\sum_{n=n_0+1}^{N} \delta_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{N} \varepsilon_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \varepsilon_n$ donc la suite $\nearrow$ $\left(\sum_{n=n_0+1}^{N} \delta_n\right)_{n \geq n_0}$

est majorée donc convergente dans $\mathbb{R}$

3 <u>Corollaire</u> (1) les deux définitions sont équivalentes

(2) une série normalement convergente est uniformément absolument convergente et (avec les notations des def 1 et 2) on a

$$\forall N \geq n_0 \quad \left\| \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n| \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n$$

pv (1) def 1 $\Rightarrow$ def 2 prendre $\varepsilon_n = \|f_n\|$

def 2 $\Rightarrow$ def 1 Rappels a) et b) $\sum_{n > N_0} \|f_n\| \leq \sum_{n > N_0} \varepsilon_n < +\infty$ $\square$

(2) On vérifie le critère de Cauchy uniforme

$$\forall t \in I \quad M > N \quad \left| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(t) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |f_n(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \varepsilon_n$$

d'où le résultat par le critère de Cauchy pour $\sum \varepsilon_n$

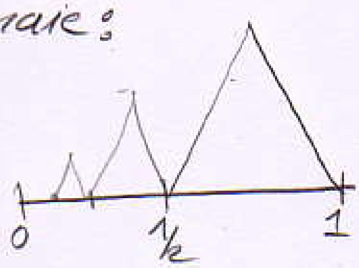
donc $\sum f_n$ converge uniformément absolument et

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\| = \lim_{M \to +\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{M} f_n \right\| = \lim_{M \to \infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{M} f_n \right\|$$

$$\leq \lim_{M \to \infty} \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\| \qquad \square$$

La réciproque de (2) n'est pas vraie :

Exemple $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$x \notin [1/2, 1] \quad f_0(x) = 0$

$x \in [1/2, 3/4] \quad f_0(x) = 4x - 2$

$x \in [3/4, 1] \quad f_0(x) = 4 - 4x$

$0 \leq \varepsilon_n \searrow 0$ qd $n \to \infty$ $\quad f_n(x) = \varepsilon_n f_0(2^n x)$

alors $\sum f_n$ converge uniformément absolument

pcq $0 \leq f_n(x) \leq \varepsilon_n$ et $0 < f_n(x) \Rightarrow x \in]2^{-(n+1)}, 2^{-n}[$

Comme les $]2^{-(n+1)}, 2^{-n}[$ sont deux à deux disjoints

on a $0 \leq \sum_{n=N+1}^{M} f_n(t) \leq \varepsilon_N \searrow 0$ qd $N \to +\infty$

mais comme $\|f_n\| = f_n\left(3\, 2^{-(n+2)}\right) = \varepsilon_n$

$\sum f_n$ n'est pas normalement convergente si $\sum \varepsilon_n = +\infty$

par exemple si $n \geqslant$ $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $\quad \sum_{n=2^k}^{2^{2k}-1} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=2^k}^{2^{2k}-1} \frac{1}{2^k} = 2^k \frac{1}{2^k} = 1$

et le critère de Cauchy n'est pas vérifié.

4 Suites tests (rappels)

a) $r \in [0, 1[$ $\quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n = \frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0$ qd $N \to \infty$

Exercice $\quad \sum_{n=N+1}^{\infty} n r^n \leq (N+1) r^{N+1} \frac{1}{(1-r)^2}$

b) Si $s > 1$ $\quad \sum_{s=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{s-1} \frac{1}{N^{s-1}}$

5 Applications aux séries entières

Complément de déf $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ $\quad \sum f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$

converge normalement s'il y a n_0 et pour $n > n_0$ ε_n tq

$$\forall z \in \mathcal{U} \quad |f_n(z)| \leq \varepsilon_n \text{ et } \sum_{n > n_0} \varepsilon_n < +\infty$$

on a encore convergence normale $\Rightarrow$ convergence absolue uniforme

<u>Corollaire</u> Soit $a_n \in \mathbb{C}$ $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $|a_n z_0^n|$ est bornée

($\exists K$ tq $\forall n$ $|a_n z_0^n| \leq K$) alors

$\forall r \in [0,1[$ $\sum a_n z^n$ converge normalement dans

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r|z_0|\}$$

pv $\quad |a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| r^n \leq K r^n$ et $\displaystyle\sum_{n > N} K r^n \leq \frac{K r^{N+1}}{1-r}$ $\square$

6 Convergence normale à paramètres

$$f_{xn} : I \to \mathbb{C} \quad x \in X \iff f_n : X \times I \to \mathbb{C} \quad (f_{xn}(t) = f_n(x,t))$$

converge normalement en le paramètre $x \in X$ s'il y a n_0

tq $\forall n > n_0$ $\quad f_n(X \times I)$ borné et $\displaystyle\sum_{n > n_0} \|f_n\|_{X \times I} < +\infty$

Si f_{xn} converge normalement en $x \in X$ et $\sum f_{nx} = f_x$

et si ($X = \mathbb{N}$ ou X intervalle de $\mathbb{R}$)

$\forall n > n_0$ $\quad f_{xn} \xrightarrow[x \to x_0]{} f_n$ alors f_x a une limite qd $x \to x_0$

et $\lim_{x \to x_0} \sum f_{xn} = \sum \lim_{x \to x_0} f_{xn}$

(c'est le thm d'échange des limites pour les suites de fcts uniformément convergentes)

7. Suite normalement convergentes et point fixe

def une suite $f_n : I \to \mathbb{C}$ converge normalement si (avec $f_{-1} = 0$) la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n - f_{n-1}$ converge normalement

Corollaire une suite de fonction normalement convergente est uniformément convergente et

$$\lim_{n \to \infty}{}_u f_n = \sum_{n \geq 0} f_n - f_{n-1} = f_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} - f_n$$

On note $B(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \mid f \text{ bornée}\}$

Théorème Soit $\emptyset \neq X \subset B(I)$ tq si $g_n \in X$ et $g_n \xrightarrow[u]{} g$ alors $g \in X$

et $F : X \to X$, $K > 0$ tq $\forall f, g \in X$ $\|F(f) - F(g)\| \leq K \|f - g\|$ alors

(1) il y a un unique $f_\infty \in X$ tq $F(f_\infty) = f_\infty$

(2) $\forall f_0 \in X$ et $f_n : I \to \mathbb{C}$ définie par récurrence par $f_{n+1} = F(f_n)$ alors $f_n \xrightarrow[u]{} f$ plus précisément $\forall n \geq N \geq 0$ $\|f_n - f_\infty\| \leq \frac{K^N}{1-K} \|f_1 - f_0\|$

pv pour $n \geq 1$ on a $f_{n+1} - f_n = F(f_n) - F(f_{n-1})$

donc $\|f_{n+1} - f_n\| \leq K \|f_n - f_{n-1}\|$

et par récurrence (descendante) sur n $\|f_{n+1} - f_n\| \leq K^n \|f_1 - f_0\|$

ainsi la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} - f_n$ est normalement convergente

on pose $f_\infty = f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} - f_n = \lim_{n \to \infty} f_{n+1} = \lim_{n \to \infty} F(f_n) \in X$
(par hypothèse)

Affirmation $f_\infty = F(f_\infty)$.

pv Soit $\varepsilon > 0$ et N tq $\forall n > N$ $\|f_n - f_\infty\| \leq \varepsilon$

alors $\|F(f_n) - F(f_\infty)\| \leq K\varepsilon < \varepsilon$ donc $f_\infty = \lim_{n \to \infty} F(f_n) = F(f_\infty)$ $\boxminus$

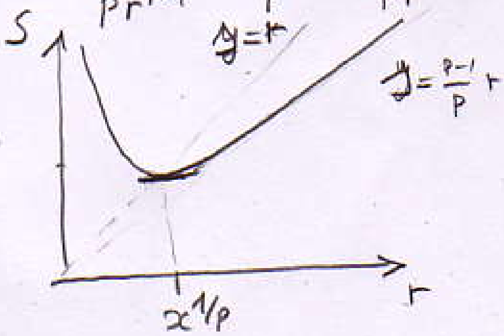
unicité de f_∞ tq $F(f_\infty) = f_\infty$: Soit f'_∞ tq $F(f'_\infty) = f'_\infty$

alors $\|f_\infty - f'_\infty\| = \|F(f_\infty) - F(f'_\infty)\| \leq K \|f_\infty - f'_\infty\|$

donc $(1-K)\|f_\infty - f'_\infty\| \leq 0 \underset{1-K>0 \text{ et } \|f'_\infty - f_\infty\| \geq 0}{\Longrightarrow} \|f_\infty - f'_\infty\| = 0$

<u>Application</u> $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $x > 0$ $S_x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto r - \frac{r^p - x}{p r^{p-1}} = \frac{p-1}{p} r + \frac{x}{p r^{p-1}}$



on a $\forall r > 0$ $S_x(r) > 0$ et

a) $S_x(r) = r \iff r^p = x$

b) $S'_x(r) = \frac{p-1}{p} - \frac{p-1}{p} \frac{x}{r^p} = \frac{p-1}{p} \frac{r^p - x}{r^p}$

donc si $r^p \geqslant x$ on a $0 \leqslant S_x'(r) \leqslant \frac{p-1}{p}$

et $S_x : [x^{1/p}, +\infty[\to [x^{1/p}, +\infty[$ est croissante et vérifie

$$\forall r_1, r_2 \in [x^{1/p}, +\infty[\quad |S_x(r_1) - S_x(r_2)| \leqslant \frac{p-1}{p} |r_1 - r_2|$$

et $x^{1/p} \leqslant S_x(r) \leqslant r$

Soit $X = \{ f :]0, M] \to]0, M+1] \mid \forall x \in]0, M] \; f(x)^p \geqslant x \}$

$f(x) = x+1$ est dans X donc $X \neq \emptyset$ et X vérifie

si $f_n \in X$ $f_n \to f$ alors $f(x)^p = \lim f_n(x)^p \geqslant x > 0$ donc $f \in X$

$f(x) = \lim f_n(x) \leqslant M+1$

Soit $F : X \to \mathcal{B}(I)$ $F(f)(x) = S_x(f(x))$

on a $0 < x^{1/p} \leqslant \underset{\substack{\| \\ F(f(x))}}{S_x(f(x))} \leqslant f(x) \leqslant M+1$ donc $F(f) \in X$

et $\forall f, g \in X$ $\| F(f) - F(g) \| \leqslant \frac{p-1}{p} \| f - g \|$

pr $\forall x \in]0, M]$ $|F(f)(x) - F(g)(x)| = |S_x(f(x)) - S_x(g(x))| \leqslant \frac{p-1}{p} |f(x) - g(x)|$
$\leqslant \frac{p-1}{p} \| f - g \|$

donc $F^n(f) \xrightarrow[u]{} R_p :]0, M] \to]0, M+1]$
$x \mapsto x^{1/p}$

8 Familles sommables

<u>Rappel</u> comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ qd $n \to \infty$ et

$$0 \leq \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\left(\text{donc } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = 1 < +\infty\right)$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ est convergente

mais n'est pas absolument convergente

<u>Affirmation</u> pour tout $x \in \mathbb{R}$ il y a une bijection $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\text{tq} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{v(n)} \frac{1}{v(n)+1} = x$$

pv Soit $0 < k_1$ tq $x < \sum_{k=0}^{k_1} \frac{1}{2k+1}$

l_1 tq $x - \frac{1}{l_1} < \sum_{k=0}^{k_1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{l=0}^{l_1} \frac{1}{2l+2} < x$

et k_n l_n définis par récurrence par

$$x < \sum_{k=0}^{k_n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{l=0}^{l_n} \frac{1}{2l+2} < x + \frac{1}{k_n}$$

$$x - \frac{1}{l_n} < \sum_{k=0}^{k_{n+1}} \frac{1}{2k+1} - \sum_{l=0}^{l_n} \frac{1}{2l+2} < x.$$

k_n et l_n sont strictement croissantes et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ défini par

$$0 \leq n \leq k_1 \quad v(n) = 2n+1$$

$$k_1 \leq n \leq k_1 + l_1 + 1 \quad v(n) = 2(n-k_1)$$

$$k_n + l_n + 1 < n \leq k_{n+1} + l_n + 1 \quad v(n) = 2(n + l_n - 1) + 1$$

$$k_{n+1} + l_n + 1 < n \leq k_{n+1} + l_{n+1} + 1 \quad v(n) = 2(n - k_{n+1} - 1)$$

alors $k_n + l_n + 1 < m \leq$

$$x - \frac{1}{l_n} \leq \sum_{m=0}^{m} (-1)^{v(n)} \frac{1}{v(n)+1} < x + \frac{1}{k_n}$$

<u>Théorème 1</u> Si $\sum a_n$ est une série complexe absolument convergente et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{v(n)}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} a_{v(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

<u>def</u> une famille $(a_x)_{x \in X}$ $a_x \in \mathbb{C}$ [resp $a_x : I \to \mathbb{C}$ borné] est <u>sommable</u>, ou la série $\sum_{x \in X} a_x$ <u>converge en vrac</u> de somme $s \in \mathbb{C}$ [resp. $s : I \to \mathbb{C}$] si $\forall \varepsilon > 0$

$\exists Y \subset X$ partie finie tq $\forall Z \subset X$ partie finie avec $Y \subset Z$ on a

$$\left| \sum_{z \in Z} a_z - s \right| \leq \varepsilon \quad \left[\text{resp. } \left\| \sum_{z \in Z} a_z - s \right\| \leq \varepsilon \right]$$

dans le cas $a_x : I \to \mathbb{C}$ la convergence est normale en vrac

si la série numérique $\sum_{x \in X} \|a_x\|$ converge en vrac

Remarques ① Si $v : \mathbb{N} \to X$ est une bijection,

comme pour toute partie finie $Y \subset X$ il y a $N \in \mathbb{N}$

tq $Y \subset v(\{0, \ldots, N\})$ (donc

(donc $\forall n \geq N$ $Z = v(\{0, \ldots, N\})$ est une partie finie $Z \subset X$ avec $Y \subset Z$)

si $\sum_{x \in X} a_x$ converge en vrac alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{v(n)}$

converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_{v(n)} = \sum_{x \in X} a_x$

[En particulier $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ ne converge pas en vrac]

Théorème 1 (Critère de Cauchy pour la convergence en vrac)

Soit $(a_x)_{x \in X}$ $a_x \in \mathbb{C}$ [resp. $a_x : I \to \mathbb{C}$] alors sont équivalents

(1) $\sum_{x \in X} a_x$ converge en vrac

(2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Y \subset X$ Y finie tq $\forall T \subset X \setminus Y$ T finie on a

$$\left| \sum_{t \in T} a_t \right| \quad \left[\text{resp } \left\| \sum_{t \in T} a_t \right\| \right] \leq \varepsilon$$

P2

pv (1) $\Rightarrow$ (2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists Y \subset X$ Y finie tq $\forall Y \subset Z \subset X$ Z finie

$$\left|\sum_{z \in Z} a_z - s\right| \leq \varepsilon/2$$

donc si $T \subset X \setminus Y$ T finie et $Z = Y \cup T$ on a

$$\left|\sum_{t \in T} a_t\right| = \left|\sum_{z \in Z} a_z - \sum_{y \in Y} a_y\right| = \left|\sum_{z \in Z} a_z - s + s - \sum_{y \in Y} a_y\right|$$

$$\leq \left|\sum_{z \in Z} a_z - s\right| + \left|s - \sum_{y \in Y} a_y\right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1) si $\forall T \subset X \setminus Y_\varepsilon$ T finie $\left|\sum_{t \in T} a_t\right| < \varepsilon$

alors $\forall Y \subset Z = Y \sqcup T \subset X$ Z finie

$$\sum_{z \in Z} a_z = \sum_{y \in Y} a_y + \sum_{t \in T} a_t \in \left\{ u \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|u - \sum_{y \in Y} a_y\right| \leq \varepsilon \right\}$$

donc la suite des disques $\left\{ u \;\middle|\; \left|u - \sum_{y \in Y_{1/2^n}} a_y\right| \leq 1/2^{n-1} \right\}$

est emboîtée et comme leurs rayons $1/2^{n-1} \to 0$ leur intersection est réduite à un point $\sum_{x \in X} a_x$:

si $\left|u - \sum_{y \in Y_{1/2^{n+1}}} a_y\right| \leq \frac{1}{2^n}$ alors $\left|u - \sum_{y \in Y_{1/2^n}} a_y\right| = \left|u - \sum_{y \in Y_{1/2^{n+1}}} a_y + \sum_{y \in Y_{1/2^{n+1}} \setminus Y_{1/2^n}} a_y\right|$

$$\leq \left|u - \sum_{y \in Y_{1/2^{n+1}}} a_y\right| + \left|\sum_{y \in Y_{1/2^{n+1}} \setminus Y_{1/2^n}} a_y\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$ fin de la pv en exercice $\square$

<u>Corollaire 1</u> Si $\sum_{x\in X} a_x$ converge en vrac et $X'\subset X$

alors $\sum_{x\in X'} a_x$ converge en vrac.

pr Si $\forall\varepsilon>0\ \exists Y\subset X$, Y finie tq $\forall T\subset X\setminus Y$, T finie $\left|\sum_{t\in T} a_t\right|\leq\varepsilon$

alors $Y'=Y\cap X'$ est finie et $\forall T'\subset X'\setminus Y'$, T' finie on a $T'\subset X\setminus Y$ donc $\left|\sum_{t\in T'} a_t\right|\leq\varepsilon$ □

<u>Corollaire 2</u> Si $X=\bigcup_{y\in Y} X_y$ $y\neq y'$ $X_y\cap X_{y'}=\emptyset$

[càd $X=\coprod_{y\in Y} X_y$ est une partition de X]

et $\sum_{x\in X} a_x$ converge en vrac alors

(1) $\forall y\in Y$ $\sum_{x\in X_y} a_x$ converge en vrac (cor 1)

(2) $\sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X_y} a_x\right)$ converge en vrac vers $\sum_{x\in X} a_x$

□

<u>Corollaire 3</u> Si $\sum_{x\in X} a_x$ converge en vrac

alors $\sum_{x\in X} |a_x|$ converge en vrac

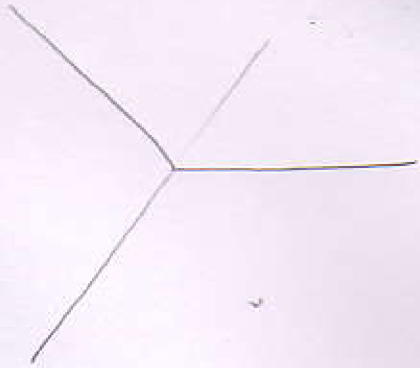
pr $Y=\{0,1,2,3\}$ $X_0=\{x\in X \mid a_x=0\}$

$0<j$ $X_j=\left\{x\in X \mid a_x\neq 0\ \ a_x=|a_x|e^{2\pi i\varphi}\ \ \frac{j-1}{3}\leq\varphi<\frac{j}{3}\right\}$

si $x \in X_0$ $\quad 0 = a_x \geq \frac{1}{2}|a_x| = 0$

si $x \in X_j$ $\quad 1 \leq j \leq 3$

$$\mathrm{Re}\; a_x e^{-\frac{2\pi i j}{3}} \geq \frac{1}{2}|a_x|$$



donc $e^{-\frac{2\pi i j}{3}} \sum_{x \in X_j} a_x \geq \frac{1}{2} \sum_{x \in X_j} |a_x|$

et $\sum_{x \in X} |a_x| \leq 2 \sum_{j=0}^{3} \left| \sum_{x \in X_j} a_x \right| < \infty$ par cor 1

Ce formalisme ne permet pas de changer l'ordre de sommation dans un cadre plus général que le théorème 1 rappelle mais rend les preuves des corollaires 1, 2 et 3 tautologiques ainsi que de

<u>Cor 2'</u> Si $\sum_{y \in Y} a_x$ et $\sum_{z \in Z} b_z$ converge en vrac alors

$\sum_{(y,z) \in Y \times Z} a_x b_y$ converge en vrac vers $\left(\sum_{x \in X} a_x\right)\left(\sum_{y \in Y} b_y\right)$

pr. cor 2 avec $X = Y \times Z$ $\quad X_y = \{y\} \times Z$

<u>Cor 2''</u> Si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ $\sum_{l=0}^{\infty} c_l$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ converge absolument

et $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l\right)$

par cor 2 avec $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad a_{(k,l)} = b_k \times c_l$, $Y = \mathbb{N}$ $\quad X_n = \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k+l=n\}$