30/01/2007

Rappel Th1 $f_n : I \to \mathbb{C}$ $\lim_{n\to\infty} f_n = f : I \to \mathbb{C}$; $a \in I$ tq $\forall n$ f_n continue en a.

Alors f est continue en a

Rmq f_n (resp. f) continue en a $\Leftrightarrow \lim_{I \ni x \to a} f_n(x) = f_n(a)$ $\left[\text{resp. } \lim_{I \ni x \to a} f(x) = f(a)\right]$

(la limite existe & vaut $f_n(a)$ (resp. $f(a)$))

Théorème 2 Soit $f_n :]a, b[\to \mathbb{C}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ [$a = -\infty$ ou $b = +\infty$ permis]

Si $\lim_{x\to a} f_n(x)$ $\left[\text{resp. } \lim_{x \to b} f_n(x)\right]$ existe

Alors $\lim_{x\to a} f(x)$ $\left[\text{resp. } \lim_{x\to b} f(x)\right]$ $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$ $\left[\text{resp. } \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b} f_n(x)\right]$

existent et

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

$$\left[\text{resp } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to b} f_n(x)\right) = \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\right]$$

!! <u>Contre-exemple</u> $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \longrightarrow 0$ qd $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

La convergence de f_n vers f n'est pas uniforme

$\left| \dfrac{x^2}{x^2+n+1} - 0 \right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n+1 \geqslant x^2 \dfrac{[1-\varepsilon]}{\varepsilon} \xrightarrow{d} \infty$ de qd $x \to +\infty$

donc n ne peut être choisi indépendant de x !

pv on peut supposer (o.p.s.), voir TD2 $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} f_n(x)$ existe

<u>Lemme</u> Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_n :]a, b[\to \mathbb{C}$ une suite de fonction uniformément convergente et t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \to a} f_n(x) = \zeta_n$ [la limite existe et est ζ_n]

alors la suite $\bar{f}_n : [a, b[\to \mathbb{C}$, $\bar{f}_n(a) = \zeta_n$ et si $x \in]a, b[$ $\bar{f}_n(x) = f_n(x)$ converge uniformément [En particulier la suite ζ_n converge!]

pv f_n vérifie le critère de Cauchy (uniforme)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ tq \ \forall m, n \geqslant N \ \forall x \in]a, b[\ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$$

En faisant tendre x vers a $\quad |\bar{f}_n(a) - \bar{f}_m(a)| \leqslant \varepsilon$

donc, puisque $[a, b[= \{a\} \cup]a, b[$ et si $\bar{x} \in]a, b[$ $\bar{f}_k(x) = f_k(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ tq \ \forall m, n \geqslant N \ \forall \bar{x} \in [a, b[\ |\bar{f}_n(\bar{x}) - \bar{f}_m(\bar{x})| \leqslant \varepsilon$$

c.a.d $\bar{f}_n$ vérifie le critère de Cauchy (uniforme)

donc est convergente.

pv du thm 2 : Comme f_n est continue en a le thm 1 s'applique. □

<u>Corollaire 1</u> Soit $g_n : I \to \mathbb{C}$ convergeant uniformément vers $g : I \to \mathbb{C}$

et $a \in I$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ g_n a une limite à droite en a

[resp. $b \in I$ ——— gauche en b]

Alors g a une limite à droite en a [resp. à gauche en b] et

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a^+} g_n(x) \quad \left[\text{resp. } \lim_{x \to b^-} g(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to b^-} g_n(x) \right]$$

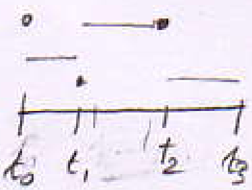
pv Si $]a, b'[\subset I \cap]a, +\infty[$ (resp. $]a', b[\subset]-\infty, b[\cap I$)

C'est le thm 2 pour $f_n = g_{n|]a,b'[}$ (resp. $g_{n|]a',b[}$)

<u>definitions</u> $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est (1) en escalier

si il y a $a = t_0 < t_1 \dots < t_p = b$ et $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ t.q.

$\forall k = 1, \dots, n$ $\forall x \in]t_{i-1}, t_i[$ $f(x) = c_i$



(2) réglée si elle est limite uniforme

d'une suite f_n de fonctions en escalier.

Corollaire 2 $\quad f : [a, b] \to \mathbb{C}$ réglée alors

(1) $\forall x \in [a, b[$ f a une limite à droite en x $\lim\limits_{t \to x^+} f(t)$

(2) $\forall x \in]a, b]$ ——————— gauche — $\lim\limits_{t \to x^-} f(t)$

(3) Si $f = \lim\limits_{n \to \infty} {}_u f_n$ avec f_n constante sur $]t_{k-1,n}\ t_{k,n}[\ [0 < k \leq p_n]$

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{t_{0,n}, t_{1,n}, \dots, t_{p_n,n}\} \text{ et } x \in [a, b] \setminus D$$

alors f est continue en x

$$\left[\text{En particulier } \left\{x \in [a, b] \;\middle|\; \lim_{t \to x^-} f(t) \neq \lim_{t \to x^+} f(t)\right\} \subset D\right]$$

Exemple (une def de sinus) (voir TD)

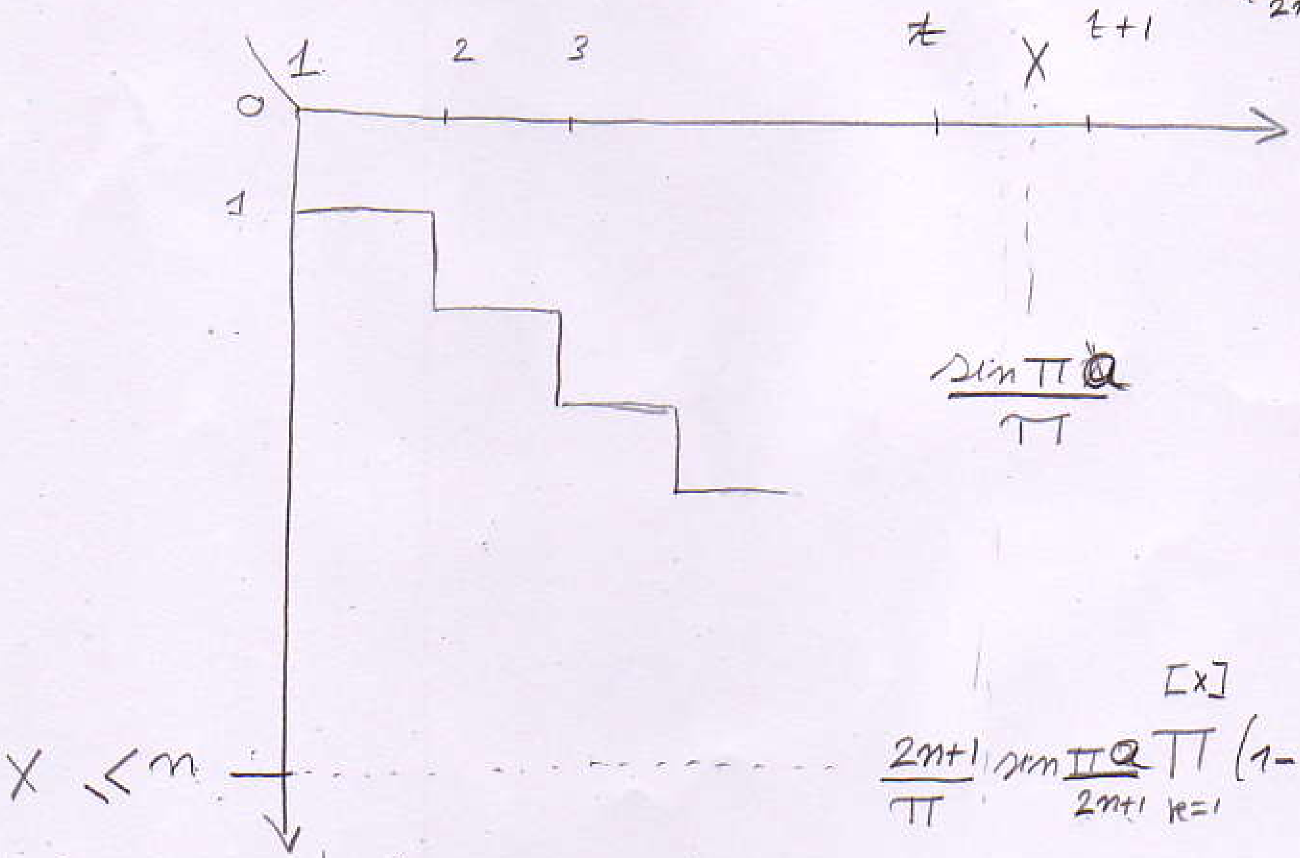
① $m \in \mathbb{N}$

$$* \quad \sin(\pi x) = (2m+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2m+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2m+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2m+1}\right)}\right)$$

② $a \in \mathbb{R}$ $\quad P_{a,n},\ P_a : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$P_a(x) = a\prod_{k=1}^{[x]}\left(1-\frac{a^2}{k^2}\right)$$

$$P_{a,n}(x) = \frac{2n+1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi a}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{\min(n,[x])}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right)$$



$$\frac{2n+1}{\pi}\sin\frac{\pi a}{2n+1}\prod_{k=1}^{[x]}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right)$$

$$\lim_{X\to\infty} P_{a,n}(X) = P_{a,n}(n) = \frac{\sin \pi a}{a}$$

$$P_{a,n} = u_0 \times u_1 \dots \times u_{[x]} \quad u_0 = \frac{2n+1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi a}{2n+1}\right)$$

$$1 \leq k \leq n \quad u_k = 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}$$

$$[x] \geq k \geq n \quad u_k = 1$$

$$P_a = v_0 \times v_1 \dots \times v_{[x]} \quad v_0 = a \quad 1 \leq k \quad v_k = 1 - \frac{a^2}{k^2}$$

$$P_{a,n} - P_a = (u_0 - v_0) \times u_1 \times \dots \times u_{[x]}$$

$$+ \; v_0 \times (u_1 - v_1) \times \dots \times u_{[x]}$$

$$+ \; v_0 \times \dots \times v_{k-1} \times (u_k - v_k) \times u_{k+1} \times \dots \times u_{[x]}$$

$$+ \; v_0 \times \dots \times v_{[x]-1} \times [u_{[x]} - v_{[x]}]$$

$$|v_0|, |u_0| \leq |a| \;,\; |v_k|, |u_k| \leq \frac{\pi |a|}{2k} \quad \left(\leq 1 \text{ si } k > \left[\frac{\pi |a|}{2}\right]\right)$$

$$|u_0 - v_0| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{2n+1}\right)^2 \quad (\text{DL})$$

$$|u_k - v_k| \leq \pi^2 a^2 \min\left(\frac{1}{4k^2}, \frac{2+a^2}{(2n+1)^2}\right)$$

$n \geq N \quad |a| \leq A \geq 2 \quad \left|P_{a,n}(x) - P_a(x)\right| \leq K(A) \times \frac{1}{N}$

donc $\boxed{\lim_{n \to \infty} P_{a,n} = P_a} \underset{\text{Thm 2}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to \infty} P_a(x) = \frac{\sin \pi a}{a}$

Remarque $P_{a,n}$ $P_a : [1, +\infty[$ dépendent du paramètre $a \in \mathbb{R}$

def $y \in Y$ une suite $f_{y,n} : I \to \mathbb{C}$ dependant du parametre $y \in Y$ $\left[\begin{array}{l} f_n : Y \times I \to \mathbb{R} \\ f_{y,n}(t) = f(y, t) \end{array} \right]$

est bornée uniformement en le paramètre si $|f(Y \times I)|$ est borné

la norme uniforme en Y de f_y est

$$\|f\|_Y = \|f\|_{Y \times I} = \sup(|f|(Y \times I))$$

une suite $f_{y,n} : I \to \mathbb{C}$ $y \in Y$

converge uniformement en $y \in Y$ vers $f_y : I \to \mathbb{C}$ $\lim_{n \to \infty} u_Y f_{y,n} = f_y$

si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\|f_n - f\|_{Y \times I} \leq \varepsilon$

$(\forall y \in Y \ \|f_{y,n} - f_y\| \leq \varepsilon)$

(le N peut être choisi independemment de $y \in Y$.)

Remarque si Y est un intervalle on peut voir

$$f_y \text{ (resp. } f_{y,n}) : I \to \mathbb{C} \quad \text{(dependant de } y \in Y$$

comme f_t (resp $f_{t,n}$) : $Y \to \mathbb{C}$ $\quad$ (——— $t \in I$)

Corollaire $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P_n(a) = a \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a^2}{k^2}\right)$

alors $\forall A > 0$ $P_{n|[-A,A]} : [-A, A] \to \mathbb{R}$

converge uniformément vers $a \mapsto \frac{\sin \pi a}{a}$