23/01/2007

Convergence uniforme d'une suite de fonctions.

On se donne I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$

<u>Rappel</u> $A \subset \mathbb{R}$ est majorée si $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tq. $\forall a \in A \quad a \leq M$

Si A est majorée et non vide elle a une borne supérieure $\operatorname{Sup} A$

- $\forall a \in A \qquad a \leq \operatorname{Sup}(A)$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A \quad \operatorname{Sup}(A) - \varepsilon < a \quad (\Leftrightarrow \operatorname{Sup} A < a + \varepsilon)$

<u>Exercice</u> Si $A = X \cup Y$ avec $X \neq \emptyset \neq Y$ et X, Y majorées alors A est majorée

et $\sup(A) = \max(\operatorname{Sup}(X), \operatorname{Sup}(Y))$

<u>definition</u>. une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est bornée si

$|f(I)|$ est majorée la norme de f est $\|f\| = \operatorname{Sup}(|f|(I))$

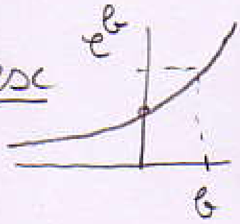
$\left(\overset{\text{def}}{=} \{ |f(x)| \,;\, x \in I \} \text{ une partie non vide de } \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \right)$
(car $I \neq \emptyset$)

- Si $I \supset J \neq \emptyset$ sous-intervalle f est bornée sur J si $f_{|J} : J \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ est bornée

et la norme de f sur J est $\|f\|_J = \|f_{|J}\| \quad \left[= \operatorname{Sup}(|f|(J)) \right]$

<u>Remarques</u> 1) $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, $J = [a,b] \subset I$ alors

f est bornée sur J et $\|f\|_J = \max(|f(b)|, |f(a)|)$

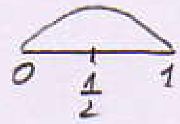
<u>ex</u> 

$I = \mathbb{R}$ $f = \exp$ non bornée sur $\mathbb{R}$ mais bornée sur $J =]-\infty, b]$ et $\|\exp\|_{]-\infty,b]} = e^b$

2) $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ union finie de sous-intervalles tq $f_{|I_k}$ bornée

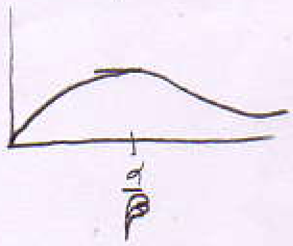
[par exemple les I_k fermés et f monotone sur I_k]

alors f est bornée et $\|f\| = \max(\|f_{|I_1}\|, \dots, \|f_{|I_k}\|)$

ex • $f(x) = x(1-x)$ 

$\|f_{|[0,1]}\| = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

<u>exercice</u> $f_{m,n} : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f_{m,n}(x) = x^m(1-x^n)$ $\|f_{m,n}\| = ?$

• $\alpha, \beta > 0$ $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x^\alpha e^{-\beta x}$ 

$\|f\| = f(\frac{\alpha}{\beta}) = (\frac{\alpha}{\beta})^\alpha e^{-\alpha}$

<u>Lemme</u> Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ bornées, $c \in \mathbb{C}$ alors

(1) cf, $f+g$ et $f \cdot g$ sont bornées et

(i) $\|cf\| = |c|\|f\|$ (ii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (iii) $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$

pv Exercice

On note $B = \{f : I \to \mathbb{C} ; f \text{ bornée}\}$ et $\| \ \| : B \to \mathbb{R}_+$ $f \mapsto \|f\|$

<u>Rmq</u> Le lemme dit que $(B, \| \ \|)$ a les propriétés de $(\mathbb{C}, | \ |)$ qui ont permis de définir la convergence des suites complexes et d'en donner les p^tés algébriques.

2. Convergence uniforme.

définition : une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$

converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{C}$ si il y a $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

(1) pour $n \geq n_0$ les $f_n - f$ sont bornées (2) $\lim\limits_{n_0 \leq n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$

↑ suite de réels ≥ 0.

on note $f_n \underset{u}{\to} f$ qd $n \to \infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} {}_u\, f_n = f$

: une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$ converge uniformément

si il y a $f : I \to \mathbb{C}$ tq f_n converge uniformément vers f.

Traduction de (2)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_\varepsilon \; (\geq n_0)$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon$

par déf de $\|f_n - f\|$ on a $\forall x \in I \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

donc (2) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon \; \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Exercice prouver $\Leftarrow$

⚠ $f_n(x) = e^{-nx^2} \quad f(0) = 1, \; x \neq 0 \; f(x) = 0$ vérifie

ordre des quantificateurs

$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in I \; \exists n_\varepsilon$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon \; |f_n(x) - f(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-nx^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \end{array} \right\} \leq \varepsilon$

$\left[n_\varepsilon = 0 \text{ si } x = 0 \text{ et } n_\varepsilon = 1 + \left[\frac{\log 1/\varepsilon}{x^2} \right] \text{ si } x \neq 0 \right]$

mais la convergence n'est pas uniforme puisque pour

$x = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \left| f_n(x) - f(x) \right| = e^{-1} > \frac{1}{3}$

Les « phrases » $\forall \varepsilon>0 \forall x\in I \ \exists n_\varepsilon \text{ tq } \forall n \geqslant n_\varepsilon \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
(équivalentes)

$\forall x\in I \ \forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon \text{ tq } \forall n \geqslant n_\varepsilon \ |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$

traduisent la convergence simple de f_n vers f

c.a.d. pour tout $x \in I$ la convergence de la suite complexe

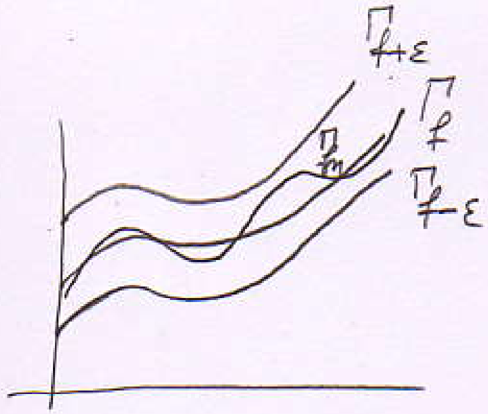
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers le nombre complexe $f(x)$

En général Si P est une propriété dépendant

de $(a,b) \in A\times B$

$$\left(\exists a\in A \text{ t.q } \forall b\in B \ P(a,b) \text{ vraie}\right) \Rightarrow \left(\forall b\in B \ \exists a\in A \text{ tq } P(a,b) \text{ vraie}\right)$$

donc si f_n converge uniformément vers f
alors f converge simplement vers f.



Interpretation sur le graphe

(dans le cas $f_n : I \to \mathbb{R}$)

pour $n \geqslant n_\varepsilon$ le graphe de f_n

est dans «la bande de demi épaisseur ε centrée en Γ_f »

c.a.d entre les graphes $\Gamma_{f-\varepsilon}$ et $\Gamma_{f+\varepsilon}$ de $f-\varepsilon$, $x \mapsto f(x)-\varepsilon$ et $f+\varepsilon$, $x \mapsto f(x)+\varepsilon$

Exemples ① $f_n(x) = x e^{-nx} \xrightarrow[u]{} 0$ qd $n \to \infty$

pv $\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \frac{1}{n} e^{-1} \to 0$ qd $n \to \infty$

② Soit $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors il y a une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente tq

$\exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0 \quad P_n = P_{n_0} + x_n \quad$ (donc $f = P_{n_0} + \lim_{n\to\infty} x_n$!)

pv n_0 tq pour $n \geqslant n_0$ $P_n - f$ bornée

$$P_n - P_{n_0} = P_n - f + f - P_{n_0} \begin{cases} \text{polynôme} \\ \text{borné sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{donc cst} = x_n$$

Cependant $P_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $I = [-M, M]$

alors $u_{n|I} \xrightarrow[u]{} \exp_{|I}$

Dans la pratique on se limite (quitte à se restreindre à des sous intervalles) à des suites de fonctions bornées $f_n \in I$ con

Lemme Si $f_n \xrightarrow[u]{} f$ il y a équivalence entre

(1) f bornée

(2) $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ f_n bornée

pv N tq $\forall n \geq N$ $f_n - f$ bornée alors (Lemme du ~~§1~~)

$$f_n = f_n - f + f \quad \text{donc } (1) \Rightarrow (2) \quad \|f_n\| \leq \|f_n - f\| + \|f\|$$

$f = f_n + (-1)(f_n - f)$ donc $(2) \Rightarrow (1)$ et $\|f\| \leq \|f_n\| + \|f_n - f\|$ □

Remarque Si pour $n \geq N$ on a $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ alors pour $n \geq N$ on a les majorants explicites

$$\|f_n\| = \|f_n - f + f\| \leq \|f_n - f\| + \|f\| \leq \varepsilon + \|f\|$$

$$\|f\| = \|f_n + (-1)(f_n - f)\| \leq \|f_n\| + \|(-1)(f_n - f)\| = \|f_n\| + \|f_n - f\| \leq \|f_n\| + \varepsilon$$

Proposition Soient $f_n, g_n : I \to \mathbb{C}$ deux suites de fonctions bornées ($f_n, g_n \in B$) uniformément convergentes vers f et g ($f_n \xrightarrow[u]{} f$, $g_n \to g$) et $c \in \mathbb{R}$

(1) $cf_n \xrightarrow[u]{} cf$ (2) $f_n + g_n \xrightarrow[u]{} f + g$ (3) $f_n \cdot g_n \xrightarrow[u]{} f \cdot g$

(4) Si $\forall x \in I$ $g(x) \neq 0$ et $\frac{1}{g}$ est bornée alors $\exists N$ tq $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)_{n \geq N} \xrightarrow[u]{} \frac{f}{g}$

pv Exercice de révisions sur les suites en remplaçant $(\mathbb{C}, |\ |)$ par $(B, \|\ \|)$ ⚠ Le faire surtout pour (4) !!

⚠ (1) et (2) restent vraies si on ne suppose plus f_n, g_n bornées mais pas (3) [ni (4)] $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{n}$ $g_n(x) = x = g(x)$

$f_n \xrightarrow[u]{} 0$ $g_n \xrightarrow[u]{} g$ mais $f_n g_n \not\xrightarrow[u]{} 0$ puisque $f_n g_n(n) = \frac{1}{n} n = 1$

3 Le critère de Cauchy

<u>définition</u> une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{tq} \ \forall n, m \geq n_\varepsilon \ \text{on a} \ \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

(m̃ définition que pour les suites complexes en remplaçant $|\ |$ par $\|\ \|$)

<u>Théorème</u> Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ il y a équivalence entre

(1) f_n converge uniformément

(2) f_n vérifie le critère de Cauchy uniforme

<u>Rmq</u> ∘ Comme dans le cas des suites complexe l'intérêt est (2) ⇒ (1) qui permet de prouver la convergence de la suite f_n sans connaître sa limite

[utile si on veut construire de <u>nouvelles</u> fcts à partir de suites!]

∘ la condition ne dépend pas de l'ordre de n, m on peut supposer $n \leq m$

pv (1) ⇒ (2) Exercice (révision sur les suites complexes)

(2) ⇒ (1) Soit $n, m \geq n_1$ comme

$$\forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

pour chaque $x \in I$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nb complexes

Elle a donc une limite. On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Si $\forall m,n \geqslant n_\varepsilon$ on a $\| f_n - f_m \| \leqslant \varepsilon$ alors

$$\forall m,n \geqslant n_\varepsilon \ \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \| f_n - f_m \| \leqslant \varepsilon$$

donc (en fixant n et passant à la limite qd $m \to \infty$)

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon \ \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

c.a.d. $\forall n \geqslant n_\varepsilon \ \| f_n - f \| \leqslant \varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to\infty}^{u} f_n = f$ $\square$

<u>Exemple</u> $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $M > 0$

$f_n = u_n|_{[-M,M]} : [-M, M] \to \mathbb{R}$ converge uniformément

$n, m = n+k \qquad g = g_{m,n} = f_n - f_m$

$$g(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n+k}\right)^{n+k}$$ est un polynôme

donc monotone par morceaux et $\|g\|$ est majorée par

$$\max\Big(\underbrace{|g(-M)|, \ |g(M)|}_{\leqslant \varepsilon \text{ si } n \geqslant n_0 \text{ car } f_n(-M) \text{ et } f_n(M) \text{ converge.}}, \ |g(\theta)| \text{ où } \theta \in [-M, M] \text{ vérifie } g'(\theta) = 0\Big)$$

Comme $g'(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} - \left(1+\frac{x}{n+k}\right)^{n+k-1}$

$$g(\theta) = \left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{n-1}\left[1+\frac{\theta}{n} - \left(1+\frac{\theta}{n+k}\right)\right]$$

Si $n > M$ $= \left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{n} \frac{k\theta}{n(n+k)} \frac{1}{1+\frac{\theta}{n}} = \left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{n} \frac{k}{n+k} \frac{\theta}{n+\theta}$

et $|g(\theta)| \leq \left(1+\frac{M}{n}\right)^{n} \frac{M}{n-M} = |f_n(M)| \frac{M}{n-M} \to 0$ q/ $n \to \infty$

Donc si on sait que $f_n(M)$ converge elle est

$\exists K$ tq $\forall n$ $|f_n(M)| \leq K$

et $|g(\theta)| \leq \frac{KM}{n-M}$ sera $\leq \varepsilon$ si $n \geq \frac{M(K+\varepsilon)}{\varepsilon}$ $\square$

4. Convergence uniforme et continuité

Théorème Soit une suite de fonction $f_n : I \to \mathbb{C}$ convergeant uniformément vers $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$ tel que les f_n sont continues en a. Alors f est continue en a.

Corollaire une limite uniforme de fonctions continues est continue. ■

pv du thm

Soit $\varepsilon > 0$ comme $\lim_{u,\, n \to \infty} f_n = f$

donc $\exists n_0$ tq $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon/3$

comme f_{n_0} est continue en a

$\delta > 0$ tq $x \in I$ $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \varepsilon/3$

donc $\forall x \in I$ $|x - a| \leq \delta$

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) + f_{n_0}(a) - f(a)|$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|$$

$$\leq 2\|f - f_{n_0}\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)\| \leq 2\,\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon/3 \quad \square$$