03/04/2007

Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Rappels

$f \in E$ (2π-périodique Riemann-intégrable sur $[-\pi,\pi]$)

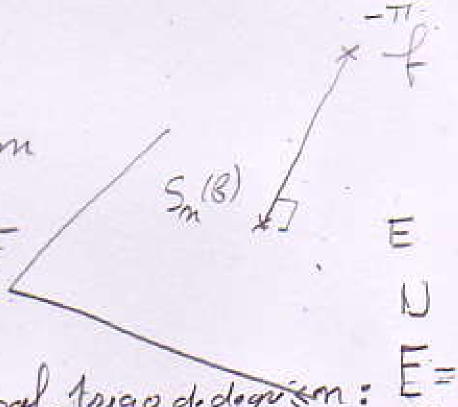
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \qquad S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{inx} = f * \sum_{k=-n}^{n} e^{inx}$$

A Convergence en moyenne quadratique

① $\forall\, d_{-n}, d_{1-n}, \dots, d_n \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_n e^{inx}\Big|^2 dx$$

$S_n(f)$ est la projection orthogonale de $f \in E$



sur le sous-espace des pol. trigo. de degré $\leq n$: $E \supset E_n = \left\{ \sum_{n=-k}^{k} d_k e^{inx} \,\middle|\, (d_{-n}, \dots, d_n) \in \mathbb{C}^{2n+1} \right\}$

② $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

③ $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = 0$$

Corollaire ① $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)=0$.

② Si f est continue et la série de Fourier de f converge uniformément alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)=f$

③ $S_n(f)$ converge ssi $S_n^*(f)$ converge

pv ① car $\sum |c_n(f)|^2 < +\infty$ □

② par cv. uniforme $g=\lim_{n\to+\infty} S_n(f)$ est continue, donc $f-g$ continue

et $\int_{-\pi}^{\pi}|f-g|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ f-S_n(f) \underset{u}{\to} f-g}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2=0$ donc $f-g=0$ □

③ $|S_n(f)(x)-S_n^*(f)(x)| = \frac{1}{2}|c_n(f)e^{inx}+c_{-n}(f)e^{-inx}| \leq \frac{1}{2}(|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ □

B Intégration par partie

f continue $f_{|[x,x+2\pi]}$ dérivable f' intégrable

$g\in E$ tq $g_{|[x,x+2\pi[} = f'_{|[x,x+2\pi[}$

Alors, pour $n\neq 0$, $c_n(f)=\frac{1}{in}c_n(g)$

pv $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(y)e^{-iny}dy = \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi}\left\{f(y)\frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{in}e^{-iny}\right)\right\}dy =$

$= \frac{1}{2\pi}\left[f(y)\left(-\frac{1}{in}\right)e^{-iny}\right]_x^{x+2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f'(y)\frac{e^{-iny}}{in}dy = 0 + c_n(g)$ □

Corollaire Si $f \in E$ est continue et dérivable sur un intervalle de longueur 2π alors

$S_n(f)$ converge uniformément vers f

pv pour $n \neq 0$ $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(g)$ par Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{n\neq 0} |c_n(f)|\right)^2 \leq \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n\neq 0} |c_n(g)|^2\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi} |f'(y)|^2 dy - \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f'(y)\, dy}_{\frac{1}{2\pi}(f(x+2\pi)-f(x))=0}\right)^2\right)$$

donc $\sum c_n(f) e^{inx}$ normalement donc uniformément cv^t. $\square$

Complément si $g \in E$ est dérivable sur $[x, x+2\pi]$

Alors $S_n(g)(x) \to \frac{1}{2}\left(g(x_-) + g(x_+)\right)$

pv $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad t \in x + \mathbb{Z}\, 2\pi$ $f(t) = \frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right)$

$s \notin x + \mathbb{Z}\, 2\pi$ $f(s) = f(s) + f(2x - s)$

vérifie les hypothèses du corollaire

La convergence de la série de Fourier est un phénomène local

Théorème Soit $f \in E$ $x \in \mathbb{R}$ $\delta \in]0,\pi[$ tq $f_{|]x-\delta,x+\delta[} = 0$

Alors $\forall t \in]x-\delta, x+\delta[$ $S_n(f)(t) \to 0 = f(t)$

De plus la convergence est uniforme sur $[x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}]$

Corollaire Soit $f, g \in E$ $x \in \mathbb{R}$ $\delta \in]0,\pi[$ tq $f_{|]x-\delta,x+\delta[} = g_{|]x-\delta,x+\delta[}$

Alors $\forall t \in]x-\delta,x+\delta[$ $S_n(f)(t)$ cv ssi $S_n(g)(t)$ cv et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(g)(t)$$

En ce cas la limite est uniforme sur $[x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}]$

Lemme $D_n^*(t) \overset{def}{=} D_n(t) - \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}) = \sin(nt)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)$

pv $D_n^*(t) = \dfrac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} - \cos t \overset{?}{=} \dfrac{\cos(nt)\sin t/2 + \sin(nt)\cos t/2}{\sin t/2} - \cos nt$

$$= \cancel{\cos nt} + \frac{\sin(nt)\cos t/2}{\sin t/2} - \cancel{\cos nt} \quad \square$$

pr du thm Soit $t \in]x-\delta, x+\delta[$

$g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $s \in \mathbb{Z}2\pi$ $g_t(s) = 0$; $s \notin \mathbb{Z}2\pi$ $g_t(s) = f(t+s)\dfrac{\cos(-\frac{s}{2})}{\sin(-\frac{s}{2})}$

Comme si $\eta = \min(x+\delta-t, t-(x-\delta))$ pour $s \in]-\eta, \eta[$ $0 = f(t+s) = g_t(s)$

et si $s \in [\eta ; 2\pi-\eta]$ $\left|\dfrac{\cos(-\frac{s}{2})}{\sin(\frac{s}{2})}\right| \leqslant \dfrac{2}{\eta}$

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\cos\frac{t-y}{2}}{\sin(\frac{t-y}{2})}\sin n(t-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_t(s)\sin(-ns)\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_t(s)\,\frac{e^{-ins}-e^{ins}}{2i}\,ds = \frac{1}{2i}\left(c_n(g_t) - c_{-n}(g_t)\right) \to 0$$

uniformité de la convergence sur $[x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}]$.

Soit $u, v \in [x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}]$

$$|S_n(f)(u) - S_n(f)(v)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g_u(s) - g_v(s)\right)\sin(-ns)\,ds\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_u(s) - g_v(s)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+s) - f(v+s)|\frac{4}{\delta}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u-v+s) - f(s)|\,ds \xrightarrow[|u-v|\to 0]{} 0 \text{ car } f \text{ intégrable}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N tq $|u-v| < \frac{\delta}{N}$ $u, v \in [x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}]$

$$\left| S_n(f)(u) - S_n(f)(v) \right| \leq \varepsilon/2$$

Soit M tq $\forall n \geq M$ $0 \leq k \leq N$ $\left| S_n(f)\left(x - \frac{\delta}{2} + \frac{k\delta}{N}\right) \right| \leq \varepsilon/2$

(On utilise la convergence simple pour les $N+1$ points
$x - \frac{\delta}{2} + \frac{k\delta}{N}$ $k = 0, 1, \dots, N$)

donc $\forall s \in [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$ il y a $k \in \{1, .., N\}$
tq $s \in \left[x - \frac{\delta}{2} + \frac{(k-1)\delta}{N}, x - \frac{\delta}{2} + \frac{k\delta}{N}\right]$

donc $\left| S_n(f)(s) \right| \leq \left| S_n(f)(s) - S_n(f)\left(x - \frac{\delta}{2} + \frac{k\delta}{N}\right) \right| + \left| S_n(f)\left(x - \frac{\delta}{2} + \frac{k\delta}{N}\right) \right|$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$