27/03/2007

énoncé la semaine précédente

Théorème Soit pour $n\in\mathbb{N}$ $k_n \in E$ t.q.

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(-t)\,dt = \frac{1}{\pi}$

(2) $\exists K>0$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi} |k_n(-t)|\,dt = 1$

(3) $\forall \alpha\in]0,\pi[$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} |k_n(-t)|\,dt = 0$

Alors $\forall f\in E$ continue en x $f*k_n(x)$ converge vers $f(x)$

De plus si f est continue $f*k_n$ converge uniformément vers f

pr f intégrable sur $[0,2\pi]$ et 2π-périodique est bornée

$\exists M>0$ tq $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|\leqslant M$

Soit $\varepsilon>0$ et N tq $\forall n\geqslant N$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(-t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$

$\alpha\in]0,\pi[$ tq $|s-x|\leqslant\alpha \Rightarrow |f(s)-f(x)|\leqslant \varepsilon/2K$

$$f*k_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,k(x-y)\,dy \overset{\text{périodicité}}{=} \int_{x-\alpha}^{x+2\pi-\alpha} f(y)k_n(x-y)\,dy \underset{\text{chgt de var } y=t+h}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} f(x+h)k_n(-h)\,dh$$

donc (1) $f*k_n(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} f(x+h)k_n(-h) - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(-t)\,dt$

$$\overset{\text{linéarité et périodicité}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha}\big(f(x+h)-f(x)\big)k_n(-h)\,dh = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\big(f(x+h)-f(x)\big)k_n(-h)\,dh + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\big(f(x+h)-f(x)\big)k_n(-t)\,dt$$

d'où $|f*k_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x+h)-f(x)||k_n(-h)|\,dh + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}|f(x+h)-f(x)||k_n(-h)|\,dh$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varepsilon}{2K}|k_n(-t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} 2M|k_n(-h)|\,dh \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(-t)|\,dt + 2M\frac{\varepsilon}{4M} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Le de plus vient de ce que si f est continue et 2π périodique elle est uniformément continue et on peut prendre α indépendant de x $\boxtimes$

Complément Si de plus k_m est paire et $g \in E$ a, en x, des limites à droite et à gauche

et
$$g * k_m(x) \to \frac{1}{2}\left(g(x_+) + g(x_-)\right)$$

pv Soit $f \in E$ tq $\forall t \in x + \mathbb{Z}2\pi$ $f(t) = \frac{1}{2}(g_-(x) + g_+(x))$

$t \notin x + \mathbb{Z}2\pi$ $f(t) = \frac{1}{2}(g(t) + g(2x - t))$

alors f est continue en x et $[2x - (x+h) = x - h]$

$$f * k_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(g(x+h) + g(x-h)\right) k_m(-h)\, dh = \frac{1}{2} g * k_m(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-h)\, k_m(-h)\, dh$$

$$\underset{\text{parité de } k_m}{=} \frac{1}{2} g * k_m(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-h) k_m(h)\, dh = \frac{1}{2} g * k_m(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+h) k_m(-h)\, dh = \frac{1}{2} g * k_m(x) + \frac{1}{2} g * k_m(x)$$

chgt de var $y = -h$

$$\underset{\text{II}}{=} g * k_m(x) \quad \square$$

1. Calculs trigonométriques

Lemme $M \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}2\pi$

$$\sum_{k=M}^{M+N} e^{i(\alpha+k)t} \overset{V}{=} e^{i(\alpha + M + \frac{N}{2})t} \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

pv
$$\sum_{k=M}^{M+N} e^{i(\alpha+k)t} = e^{i(\alpha+M)t} \sum_{\ell=0}^{N} e^{i\ell t} = e^{i(\alpha+M)t} \frac{e^{i(N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= e^{i(\alpha+M)t} \frac{e^{i\left(\frac{N+1}{2}\right)t}}{e^{\frac{it}{2}}} \frac{\left(e^{i\frac{N+1}{2}t} - e^{-i\frac{N+1}{2}t}\right)}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = e^{i(\alpha+M)t} \frac{e^{i\frac{N}{2}t}\, \cancel{e^{it/2}}}{\cancel{e^{it/2}}} \frac{\cancel{2i}\sin\frac{N+1}{2}t}{\cancel{2i}\sin t/2} \quad \square$$

Car si $t \not\equiv 0\ (2\pi)$ re(i) $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} = \frac{\sin((\frac{1}{2}+N)t)}{\sin t/2}$

$$(ii) \quad \sum_{k=M}^{M+N} \cos((\alpha+k)t) = \cos\left(\left(\alpha+M+\frac{N}{2}\right)t\right) \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin t/2}$$

$$(iii) \quad \sum_{k=M}^{M+N} \sin((\alpha+k)t) = \sin\left(\left(\alpha+M+\frac{N}{2}\right)t\right) \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin t/2}$$

$$(iii') \quad \sum_{n=0}^{N} \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}\right)t}{\sin(t/2)}$$

Remarque on peut aussi obtenir (ii) et (iii) [donc le lemme]

en utilisant $2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

qui (pour $a = (\alpha+k)t$, $b = \frac{t}{2}$ fait telescoper les "sommes", ou

puis, les m̂ formules ds l'autre sens $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

qui netoyent le resultat

on a donc $\displaystyle D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}$, paire, mais non ≥ 0

et $\displaystyle K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2((N+1/2)t)}{\sin^2(t/2)}$, paire et ≥ 0

Lemme $\displaystyle K_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikt} = D_N(t) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{|k|}{N+1} e^{int}$

p.v. $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e^{int} = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=|k|}^{N} e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} (N+1-|k|)\, e^{ikt}$ □

2 Théorème de Fejer

<u>Corollaire</u> La suite K_n vérifie les hypothèses du thm

pv comme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0t}\,dt = 1$

et $K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(t)$ (1) est satisfaite, donc

donc, puisque $K_N(t) \geq 0$, aussi (2) (avec $K=1$) et,

pour (3), comme, si $\alpha \leq x \leq 2\pi-\alpha$ $\quad \frac{\alpha}{2} \leq x \leq \pi - \frac{\alpha}{2}$ $\quad \sin x \geq \frac{\alpha}{2}$

on a $\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} |K_n(-x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\,dx$

$$\leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\,dx \leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \to 0 \text{ qd } n\to\infty$$

$\boxed{\ }$

Si $f\in E$ on note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e^{inx} = f * \sum_{k=-n}^{n} e^{inx} = f * D_n$ les sommes partielles de la série de Fourier de f donc leurs moyennes de Cesaro sont $C_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n(f) = f * \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n = f * K_n$

<u>Rappel</u> Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente

alors $(C_n(a))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de même limite,

mais si $a_n = (-1)^n$ a_n ne converge pas mais

$C_n(a) = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)} \to 0$ qd $n\to\infty$

On a donc montré (le thm et son complément s'applique à K_N)

Théorème de Féjer Soit $f \in E$ continue à droite et à gauche en x

Alors $\displaystyle \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) \to \frac{1}{2}\left(f(x_+)+f(x_-)\right)$

De plus si f est continue (partout) la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$

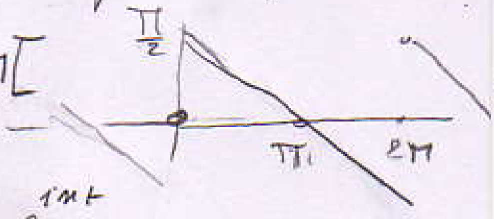
3 Une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas uno.

A $\exists M$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ $\displaystyle \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}\right| \leq M$

1° pv Exercice sur la sommation d'Abel

2° pv $\displaystyle \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{2}\sin(nx)\,dx = \left[\frac{(x-\pi)\cos nx}{\pi n}\right]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\pi n}\,dx}_{=0} = \frac{1}{n}$

donc $\displaystyle \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$ est (voir TD coeff^{ts} de Fourier réels et des fcts paires et impaires) la $N^{ième}$ somme partielle de la série de Fourier de la fonction 2π périodique impaire f qui vaut $\frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi[$



$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} = f * D_N = f * K_N + f * \sum_{n=-N}^{N} \frac{|n|}{N+1} e^{int}$$

$$= f * K_N + \sum_{n=-N}^{N} \frac{|n|}{N+1} c_n(f) = f * K_N + \sum_{n=1}^{N} \frac{|n|}{N+1}\frac{1}{2in}\left(e^{int} - e^{-int}\right)$$

d'où $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}\right| \leq |f * K_N| + \frac{N}{N+1} \leq |\sup f| + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$

(car $|f*g| \leq \sup|f| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g|$

~~exemple~~

Donc $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 4^{n^2} x}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$

~~est~~ une série uniformément convergente

$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin 4^{n^2} x}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) < +\infty \right.$

de fonctions continues $\left(x \mapsto \frac{\sin(4^{n^2} x)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right)$

donc une fonction continue

<u>Lemme</u> pour tout entier positif n $4^{(n+1)^2} - 2^{(n+1)^2} > 4^{n^2} - 2^{n^2}$

pr $4^{(n+1)^2} - 4^{n^2} = \left(2^{(n+1)^2}\right)^2 - \left(2^{n^2}\right)^2 = \left(2^{(n+1)^2} + 2^{n^2}\right)\left(2^{(n+1)^2} - 2^{n^2}\right)$

Comme $2^{(n+1)^2} - 2^{n^2} = 2^{n^2}\left(2^{2n+1} - 1\right) > 2^{n^2}(2-1) \geq 1$

on a $4^{(n+1)^2} - 4^{n^2} > 2^{(n+1)^2} + 2^{n^2}$ ($n>0$) donc $4^{(n+1)^2} - 2^{(n+1)^2} > 4^{n^2} - 2^{n^2}$ □

D'autre part $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} \frac{2 \sin 4^{n^2} x \sin kx}{k}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} \left[\frac{\cos((4^{n^2} - k)x)}{k} - \frac{\cos((4^{n^2} + k)x)}{k} \right]$

Comme, d'après le lemme les nombres

$$4^{n^2} \quad 4^{n^2}+1 \quad 4^{n^2}+2 \quad \cdots \quad 4^{(n+1)^2}-2 \quad 4^{(n+1)^2}-1 \quad 4^{(n+1)^2}$$

sont deux à deux distincts la série de Fourier de f est

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=-2^n}^{-1}\frac{\cos(4^{n^2}+k)x}{2kn^2}+\sum_{k=1}^{2^n}\frac{\cos((4^{n^2}+k)x)}{2kn^2}\right)$$

Elle ne converge pas en a_{n^2} car la somme des 2^{n^2} termes consécutifs $\sum_{l=4^{n^2}-2^{n^2}}^{4^{n^2}-1} c_n(f)$ est (dans l'ordre inverse)

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{2^{n^2}}\frac{1}{k}=\frac{1}{2n^2}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{4}\frac{1}{k}+\cdots+\sum_{k=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}\frac{1}{k}+\cdots+\sum_{k=2^{n^2-1}+1}^{2^{n^2}}\frac{1}{k}\right]$$

$$\geq\frac{1}{2n^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2^{\ell}}{2^{\ell+1}}+\cdots+\frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}}\right]=\frac{1}{4}$$

ne tend pas vers 0. $\square$