20/03/2007

Convolution et régularisation

1 Fonctions définies par des intégrales.

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ t.q.

(1) $\forall x \in [a,b]$ $\quad f_x : [c,d] \to \mathbb{C}, y \mapsto f(x,y)$ est Ri-intégrable

on pose $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\quad F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

<u>Proposition</u> Soit $x_0 \in [a,b]$ tq quand $[a,b] \ni x \to x_0$ (resp x_0^+, x_0^-)

$f_x \to f_{x_0}$ uniformément sur $[c,d]$

Alors F est continue (resp. à droite, à gauche) en x_0. ■

<u>Corollaire</u> Si de plus (1) $\forall y \in [c,d]$ $f_y : [a,b] \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x,y)$ est de classe C^1

(2) quand $[a,b] \ni x \to x_0$ $\quad (f_y)'(x) \to (f_y)'(x_0)$ uniformément sur $[c,d]$.

(3) $y \mapsto (f_y)'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x,y)\Big|_{x=x_0}$ est Ri-intégrable

Alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = \int_c^d \frac{d}{dx} f(x,y)\Big|_{x=x_0} dy$

pv $\quad f(x,y) - f(x_0,y) = (x-x_0) \int_0^1 \frac{d}{dx} f(x_0 + t(x-x_0), y)\,dt$

donc, si $x \neq x_0$, $\quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d \Big\{ \underbrace{\int_0^1 \frac{d}{dx} f(x_0 + t(x-x_0), y)\,dt}_{\downarrow u \;\; \frac{d}{dx} f(x,y)\big|_{x=x_0}} \Big\}\,dy$ $\qquad \square$

Théorème (Fubini, admis) Soit $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{C}$ continue alors

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dy\right]$$

2 L'espace $\mathcal{F}$ et convolution dans $\mathcal{F}$ et E

définition $\mathcal{F} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ 2\pi\text{-periodique} \end{array} \right\} \subset E = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ intégrable sur} \\ \text{les int. fermés} \\ 2\pi\text{-periodique} \end{array} \right\}$

définition Soit $f, g \in E$ la convolée de f et g est $f*g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(x-y)\,dy$$

Remarque $y \mapsto f(y)$, $y \mapsto g(x-y)$ sont Ri-intégrables sur les intervalles fermés donc $y \mapsto f(y)\,g(x-y)$ est Ri-intégrable sur les intervalles fermés et $f*g$ est bien définie

Prop 1 Si $f, g \in \mathcal{F}$ alors $f*g \in \mathcal{F}$

pvG Comme f est bornée et g uniformément continue sur les intervalles fermés $(y \mapsto f(y)g(x-y)) \underset{x\to x_0}{\text{cv unif}^t} (y \mapsto f(y)g(x_0-y))$ donc on peut appliquer la prop. du §1

$$f*g(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(x+2\pi-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(x-y)\,dy = f*g(x)$$

g 2π périodique □

Remarque En fait on a si $f \in E$ et $g \in \mathcal{F}$ alors $f*g \in \mathcal{F}$

(m̂ preuve)

<u>Prop 2</u> Soit $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathcal{P}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ alors

① $f*g = g*f$ (commutativité de $*$)

② $(f*g)*h = f*(g*h)$ (associativité de $*$)

③ $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)*g = \lambda_1 f_1*g + \lambda_2 f_2*g$

$f*(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) = \mu_1 f*g_1 + \mu_2 f*g_2$

pv ① $\displaystyle f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy \underset{\substack{\text{ch}^t \text{ de var} \\ u = x-y \ (y = x-u)}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\, g(u)\, du$

$\displaystyle = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} g(u)\, f(x-u)\, du \underset{\substack{\uparrow \\ \text{periodicité de} \\ u \mapsto g(u) f(x-u)}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\, f(x-u)\, du = g*f(u)$

② $\displaystyle (f*g)*h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f*g(y)\, h(x-y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, g(y-u)\, du\, h(x-y)\, dy$

$\displaystyle = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, g(y-u)\, h(x-y)\, du\, dy \underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, g(y-u)\, h(x-y)\, dy\, du$

$\displaystyle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-u}^{\pi-u} g(v)\, h(x-u-v)\, dv\, du \underset{\text{periodicité de } h}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\, h((x-u)-v)\, dv\, du$

ch^t de var $y-u=v$

$\displaystyle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, (g*h)(x-u)\, du = f*(g*h)(x)$

③ Exercice

$\square$

<u>Remarque</u> La proposition est vraie avec $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in E$ le seul point où on a utilisé la continuité est pour avoir un (Fubini facile à enoncer et prouver dans ②)

<u>Exemple</u> $f * e_n = c_n(f) e_n$ en particulier $c_n(f) = f * e_n(0)$

pv $f * e_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \, e^{inx} = c_n(f) e_n(x)$ $\boxed{\cdot}$

<u>Corollaire</u> Si $f, g \in \mathcal{T}$ $c_n(f*g) = c_n(g) \cdot c_n(f)$

pv $c_n(f*g) = (f*g)*e_n(0) = f*(g*e_n)(0) = f * c_n(g) e_n(0)$

$= c_n(g) f*e_n(0) = c_n(g) c_n(f)$.

<u>Proposition</u> 3 Si $f \in E$, $g \in \mathcal{T}$ et g est de classe C^k alors $f*g$ est de classe C^k et $(f*g)^{(k)} = f * g^{(k)}$

pv il suffit le cas $k=1$ c'est le cor. de la prop du §1 puisque

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy$$

donc $f*g'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) g'(x-y) dy$ $\square$

<u>Corollaire 1</u> Si $f \in \mathcal{T}$ est de classe C^k. $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$

pv $c_n(f^{(k)}) = f^{(k)} * e_n(0) = (f*e_n)^{(k)}(0) = f * e_n^{(k)}(0) = f*(in)^k e_n(0) = (in)^k f*e_n(0) = (in)^k c_n(f)$ $\square$

<u>Corollaire 2</u> Si $f \in \mathcal{T}$ est de classe C^1 alors la série de Fourier

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ de f converge normalement (donc uniformément)

pv ① convergence uniforme

$n \neq 0 \quad c_n(f) = \dfrac{c_n(f')}{in}$ donc $\displaystyle\sum_{n\neq 0} |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n\neq 0} |c_n(f')|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$

$$= \left(\int |f'|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \infty$$

donc la série $\sum c_n(f) e_n$ est normalement convergente

② La limite est f

pv $g = f - \sum c_n(f) e_n$ est continue et $\frac{1}{2\pi}\int |g|^2 = 0$ donc $g = 0$

$\int |g|^2 = \langle g, g\rangle = \langle f, f\rangle - \langle f, \sum c_n(f) e_n\rangle - \langle \sum c_n(f) e_n, f\rangle + \langle \sum c_n(f) e_n, \sum c_m(f) e_m\rangle$

$\langle f, f\rangle - \sum \overline{c_n(f)} \langle f, e_n\rangle - \sum c_n(f) \langle e_n, f\rangle + \sum c_n(f) \overline{c_m(f)} \langle e_n, e_m\rangle$

$= \langle f, f\rangle - \sum \overline{c_n(f)} \langle f, e_n\rangle - \sum c_n(f) \overline{\langle f, e_n\rangle} + \sum c_n(f) \overline{c_n(f)}$

$= \langle f, f\rangle - \sum \overline{c_n(f)}\, c_n(f) - \sum c_n(f) \overline{c_n(f)} + \sum c_n(f) \overline{c_n(f)}$

$= \langle f, f\rangle - \sum |c_n(f)|^2 = 0$

[où g est orthogonale à tous les polynômes trigonométriques]

<u>Remarque</u> (preuve directe du cas 1)

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\Big[f(t) e^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, in\, e^{-int}\,dt$$

$$= in \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt = in\, c_n(f) \quad \blacksquare$$

3 Régularisation

Théorème Soit $k_n \in E$ $n \in \mathbb{N}$ tq

① $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\,dt = 1$

② $\exists K > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|\,dt \leq K$

③ $\forall \alpha \in]0,\pi[$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{2\pi-\alpha} |k_n(t)|\,dt = 0$

Alors pour tout $f \in \mathcal{T}$ $f * k_n$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$

Remarques Si $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $k_n(t) \geq 0$ alors ② suit de ①

Exemples ① $k_n(t) = 2\pi\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt\right]^{-1}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$

vérifie ① (donc ② puisque ≥ 0) et ③

Remarque Si $f \in \mathcal{T}$ $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e_n = f * \left(\sum_{n=-N}^{N} e_n\right)$

mais $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ vérifie ① mais ni ② ni ③

on verra en fait qu'il y a des $f \in \mathcal{T}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e_n(x_0)$ ne converge pas cependant on verra aussi que

$F_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N$ vérifie ① ② et ③ d'où un résultat de convergence des séries de Fourier