13/02/2007

Deux résultats d'aproximation

1 Le théorème de Weierstrass

Théoreme 1 Une fonction réelle continue sur un intervalle fermé est limite uniforme de restrictions de polynômes à cet intervalle.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q(x) = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall t \in [a, b] \ |Q(t) - f(t)| \leq \varepsilon$

Proposition Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue tq $\forall t \in [0, 1] \ |f(t)| \leq 1$

Alors $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall t \in [1/3, 2/3] \ |P(t) - f(t)| \leq \varepsilon$

Exercice déduire le théorème de la proposition

pv de la proposition Soit $K_n \in \mathbb{R}[X]$ $K_n(x) = c_n (1 - x^2)^n$

où $c_n = \left[\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \right]^{-1}$ (donc $\int_0^1 K_n(x) dx = 1$)

$$I_\delta = \int_\delta^1 (1 - x^2)^n dx \leq (1 - \delta)(1 - \delta^2)^n \leq (1 - \delta^2)^n$$

$$1 \geq I_0 = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{n+1} \quad (\text{donc } 1 \leq c_n \leq n+1)$$

car, si $x \in [0, 1]$, $x^2 \leq x$

donc $\dfrac{I_\delta}{I_0} \leq (n+1)(1 - \delta^2)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ (à $\delta > 0$ fixé)

Soit N tq pour $n \geq N$ $I_\delta / I_0 \leq \varepsilon/4$

Comme f est uniformément continue il y a $0<\delta<\frac{1}{5}$ q tq
$\forall\ x,y\in[0,1] \quad |x-y|\leqslant\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant \varepsilon/2$
donc $\forall x\in[1/3, 2/3]$ u tq $|u|\leqslant\delta$ ($\cancel{\Rightarrow}\, u+\sigma\in[0,1]$)

$$\left|f(x+u)-f(x)\right|\leqslant \varepsilon/2$$

Soit $P(x)=\int_0^1 f(t)\,\gamma_n(1-(t-x)^2)^n\,dt$

$$\left[=\gamma_n\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{2k}(-1)^{k+\ell}\binom{n}{k}\binom{2k}{\ell}\int_0^1 f(t)\,t^{2k-\ell}\,dt\ x^{\ell}\in\mathbb{R}[x]\right]$$

on a (chgt de var $t=x+u$)

$$P(x)=\int_0^1 f(x+u)\,\gamma_n(1-u^2)^n\,du=$$

$$=\int_0^{\delta} f(x+u)\gamma_n(1-u^2)^n\,du+\int_{\delta}^{1} f(x+u)\gamma_n(1-u^2)^n\,du$$

comme $f(x)=f(x)\int_0^1\gamma_n(1-u^2)^n du=\int_0^{\delta} f(x)\gamma_n(1-u^2)^n du+\int_{\delta}^{1} f(x)\gamma_n(1-u^2)^n du$

on a

$$P(x)-f(x)=\int_0^{\delta}\big(f(x+u)-f(x)\big)\gamma_n(1-u^2)^n du+\int_{\delta}^{1}\big(f(x+u)-f(x)\big)\gamma_n(1-u^2)^n du$$

donc $|P(x)-f(x)|\leqslant \int_0^{\delta}\varepsilon/2\,\gamma_n(1-u^2)^n du + 2\gamma_n I_{\delta}\leqslant$

$$\leqslant \varepsilon/2\,\gamma_n I_0+2\gamma_n\,\varepsilon/4\, I_0=\varepsilon/2\,[2\gamma_n I_0]=\varepsilon \quad \square$$

2 Coefficients de Fourier de fonctions Riemann intégrables

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}2\pi}$

une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique
$(\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x))$ induit

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$

Exemples $n \in \mathbb{Z}$ $\quad e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad e_n(x) = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$

__Lemme__ Si $\tilde{f}$ est 2π périodique et Riemann intégrable sur les intervalles fermés alors $\forall a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^{a+2\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\,dx$$

on note $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ $\square$

__def__ On note E l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{T}$ quotient de fonctions à valeurs complexes, 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur les intervalles fermés.
muni du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f\overline{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Lemme $\{e_n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormée de E :

$$\langle e_n, e_n \rangle = 1 \,,\quad n \neq m \quad \langle e_n, e_m \rangle = 0$$

pv $\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}\,\overline{e^{imx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \dots$ □

définition Le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $f \in E$ est

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,e^{-int}\,dt$$

Corollaire Soit $f \in E$ alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable de plus

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|^2$$

pv ① $\forall\, M, N \in \mathbb{N}$ $\quad f - \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n \in \mathrm{Vect}(e_k \mid -M \leq k \leq N)$

est dans l'orthogonal de l'e.v. engendré par $e_{-M}, \dots, e_N$

si $-M \leq k \leq N$ on a $\left\langle f - \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n, e_k \right\rangle = \langle f, e_k \rangle - \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) \langle e_n, e_k \rangle$

$$\overset{\text{Lemme}}{=} c_k(f) - c_k(f) = 0$$

② $f = f - \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n + \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n$ et $\sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n \in \mathrm{Vect}(e_k \mid -M \leq k \leq N)$

donc $\langle f, f \rangle = \left\langle f - \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n, f - \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n \right\rangle + \left\langle \sum_{n=-M}^{M} c_n(f) e_n, \sum_{n=-M}^{N} c_n(f) e_n \right\rangle$

$\geq$

d'où $\langle f,f\rangle \geqslant \langle \sum_{n=-M}^{N} c_n(f)e_n, \sum_{n=-M}^{N} c_n(f)e_n\rangle = \sum_{n=-M}^{N} |c_n(f)|^2$ $\square$

<u>définition</u> un polynôme trigonométrique est un élément $\sum_{k=-M}^{N} a_k e_k$ de $\mathrm{Vect}(e_k \mid k\in\mathbb{Z})$

<u>Théorème 3</u> Soit $f\in E$ alors $\forall \varepsilon>0$ il y a un polynôme trigonométrique P t.q.

$$\|P-f\|_2 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle P-f, P-f\rangle} \leqslant \varepsilon$$

<u>Corollaire</u> Soit $f\in E$ alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \langle f,f\rangle$$

3. <u>Densité des polynômes trigonométriques</u>

Le thm 3 découle du

<u>Théorème 2</u> Soit $f\in E$ quotient de $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue alors f est limite uniforme de polynômes trigonométriques

pr $T_n(x) = \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n$

vérifie $\forall x \in [-\pi, \pi]$ $\quad T_n(x) \geq 0$

Soit δ_n tq $\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n T_n(x)\,dx = 1$

on a $\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} T_n(x)\,dx \geq 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n \sin x\,dx$

$$= \left[-\frac{4}{n+1}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{n+1}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{4}{n+1}$$

d'où $\delta_n \leq \frac{n+1}{4}$

$$J_\delta = \int_{-\pi}^{-\delta} T_n(x)\,dx + \int_{\delta}^{\pi} T_n(x)\,dx = 2\int_{\delta}^{\pi} T_n(x)\,dx$$

$$\leq 2(\pi-\delta)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \leq 2\pi\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n$$

car $\frac{1+\cos x}{2}$ est ↘ sur $[0,\pi]$

donc $\delta_n J_\delta \leq \frac{\pi}{2}(n+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \to 0$ qd $n \to \infty$ (à δ fixé)

Comme $P_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1+\cos(t-x)}{2}\right)^n dt$ est un polynôme trigonométrique on peut reprendre les mêmes étapes que pour le thm de Weierstrass pour obtenir $P_n \to f$ quand $n \to \infty$ $\square$