06/03/2007

<u>Théorème</u> Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ alors f est réglée ssi

(1) $\forall x\in[a,b[$ f a une limite à droite quand x tends vers a.

et (2) $\forall y\in]a,b]$ ―――――――― gauche ――――――――.

pv : $\Rightarrow$ corollaire du thm d'échange des limites (cours du 30/01/2007)

contraposée de ($\Leftarrow$) $\exists\,\varepsilon>0$ tq $\forall\,\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ en escalier $\|f-\varphi\|\geq\varepsilon$

on construit $[a_n\ b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\cdots[a_0,b_0]=[a\ b]$

t.q $b_n-a_n=2^{-n}(b-a)$ et

et $\forall\,\varphi_n:[a_n\ b_n]\to\mathbb{C}$ en escalier $\|f_{|[a_n,b_n]}-\varphi_n\|\geq\varepsilon$.

Si $\exists\,\varphi_n:[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]\to\mathbb{C}$ en escalier avec $\|f_|-\varphi_n\|\leq\varepsilon$

alors $\not\exists\,\varphi'_{n+1}:[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]\to\mathbb{C}$ en escalier $\|f_|-\varphi'_{n+1}\|\leq\varepsilon$

et on pose $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=b_n$

[sinon $\varphi:[a_n;b_n]\to\mathbb{C}$ $t\in[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}[$ $\varphi(t)=\varphi_{n+1}$

$t\in[\frac{a_n+b_n}{2},b_n[$ $\varphi(t)=\varphi'_{n+1}$

est en escalier et contredit l'hypothèse]

Sinon on pose $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

la suite d'intervalles emboîtés $[a_n,b_n]$ de longueur tendant vers 0.

a son intersection réduite à un point t_0 :

on a alors $\forall n$

soit $a_n < t_0$ et il y a $a_n \leq t_n < t_0$ avec $|f(a_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$

soit $t_0 < b_n$ et il y a $t_0 < s_n \leq b_n$ avec $|f(t_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$

[Sinon $\Psi : [a_n, b_n] \to \mathbb{C}$ $\quad a_n \leq t < t_0 \quad \Psi(t) = f(a_n)$

$$\Psi(t_0) = f(t_0)$$

$$t_0 < t \leq b_n \quad \Psi(t) = f(b_n)$$

~~est~~ en escalier et vérifiant $\|f_1 - \Psi\| \leq \varepsilon$ contredirait l'hypothèse]

Il y a donc

soit une infinité de n et $a_n \leq t_n < t_0$ $|f(a_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$

donc f n'a pas de limite à gauche en t_0

soit une infinité de n et $t_0 < s \leq b_n$ $|f(b_n) - f(s_n)| \geq \varepsilon$

et f n'a pas de limite à droite en t_0. □

<u>Corollaire</u> toute fonction continue sur un intervalle fermé est réglée. ■

Preuve directe du corollaire

Lemme de Heine une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur un intervalle fermé est uniformément continue.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall t, s \in [a, b] \ |t - s| \leq \delta \ |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$$

preuve de la contraposée Si f n'est pas uniformément continue il y a $\varepsilon > 0$ tq $\forall n > 0$ $\exists s_n, t_n \in [a, b]$ $|s_n - t_n| < 1/n$ et $|f(s_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$

on extrait une sous-suite $s_{n_k} \to s_0$

alors comme $|t_{n_k} - s_0| \leq |t_{n_k} - s_{n_k}| + |s_{n_k} - s_0| \leq \frac{1}{n_k} + |s_{n_k} - s_0| \to 0$

t_{n_k} converge vers s_0 et $\forall \delta > 0$ $\exists k$ tq

$$|t_{n_k} - s_0|, |s_{n_k} - s_0| < \delta \quad |t_{n_k} - s_{n_k}| \geq \varepsilon$$

contredisant le critère de Cauchy pour la suite

r_k définie par $r_{2k} = s_{n_k}$, $r_{2k+1} = t_{n_k}$. $\square$

pv du corollaire Soit $\varepsilon > 0$ et N tq

$$\forall (x, y) \in [a, b] \quad |x - y| \leq \frac{|b-a|}{2N} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

on définit la fonction en escalier $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$

par pour $0 \leq k \leq N$ $\varphi\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right) = f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$

et si $0 < k \leq N$ $a + \frac{(k-1)(b-a)}{N} < x < a + \frac{k(b-a)}{N}$, $\varphi(t) = f\left(a + \frac{(2k-1)(b-a)}{2N}\right)$

elle vérifie (puisque $\left|t - \frac{(2k-1)(b-a)}{2N}\right| \leq \frac{b-a}{2N}$)

$$\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$$

$\square$

<u>Le Lemme de Gronwall</u> (démonstration analogue à celle du thm de la moyenne)

Soit I, J des intervalles réels $t_0 \in I$ $J \subset [0, +\infty[$
$\mathcal{U}$ un ouvert d'un e.v. normé E $f : I \times \mathcal{U} \to E$
$g : I \times J \to \mathbb{R}$
et $\psi : I \to E$, $\varphi : I \to J$ dérivables t.q.

$$\forall t \in I \quad \psi'(t) = f(t, \psi(t)) \quad \varphi'(t) = g(t, \varphi(t))$$

Si $\|\psi(t_0)\| < \varphi(t_0)$ et $\forall (t,u) \in I \times \mathcal{U}$ $\|f(t,u)\| < g(t, \|u\|)$
Alors $\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[$ on a $\|\psi(t)\| \leq \varphi(t)$

pv Soit $X = \{ t \in I \cap [t_0, +\infty[\mid \|\psi(t)\| \leq \varphi(t) \}$

Alors par définition X est un intervalle d'origine t_0 et comme ψ et φ sont dérivables donc continues X est un intervalle fermé. Il suffit donc de montrer si $t \in X$ $t \neq \sup I$ $\exists \delta > 0$ tq $[t, t+\delta] \subset X$

- Si $\|\psi(t)\| < \varphi(t)$ cela découle de la continuité de φ et ψ
- Si $\|\psi(t)\| = \varphi(t)$ on écrit la dérivabilité de φ et ψ

Soit $0 < \varepsilon < g(t, \varphi(t) = \|\psi(t)\|) - f(t, \psi(t))$

et $\delta > 0$ tq $\forall s \in [t, t+\delta]$ on a

$$\| \psi(s) - \psi(t) - \psi'(t)(s-t) \| < \varepsilon/3 \, |s-t|$$

$$| \varphi(s) - \varphi(t) - \varphi'(t)(s-t) | < \varepsilon/3 \, |s-t|$$

donc $\|\psi(s)\| \leq \|\psi(t)\| + \|\psi'(t)\|(s-t) + \varepsilon/3 \, (s-t|$

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \varphi'(t)(s-t) - \varepsilon/3 \, (s-t)$$

comme $\|\psi(t)\| = \varphi(t)$ et

$$\|\psi'(t)\| = \| f(t, \psi(t)) \| \leq g(t, \|\psi(t)\|) - \varepsilon = g(t, \varphi(t)) - \varepsilon = \varphi'(t) - \varepsilon$$

il vient

$$\|\psi(s)\| \leq \|\psi(t)\| + (\varphi'(t) - \varepsilon)(s-t) + \varepsilon/3 \, (s-t)$$

$$\leq \varphi(t) + \varphi(s) - \varphi(t) + \varepsilon/3 \, (s-t) - \varepsilon(s-t) + \varepsilon/3 \, (s-t)$$

$$= \varphi(s) - \varepsilon/3 \, (s-t) \leq \varphi(s) \quad \square$$

Remarques 1) on n'a utilisé que ψ et φ continues à gauche et ont des dérivées à droite t.q. ...

2) Exercice écrire la preuve du cas plus général où on suppose 1) mais les hypothèses de dérivabilité seulement hors d'un ensemble dénombrable $\mathcal{D}$.

Explicitation des théorème de convergence uniforme des fonctions derivable dans le cas usuel et pour les séries

Soit $t_0 \in I$ intervalle reel et $f_n : I \to \mathbb{C}$ derivable tq

Thm1 Si (1) $f_n(t_0)$ a une limite quand $n \to \infty$

et (2) f_n' converge uniformément vers $g : I \to \mathbb{C}$ qd $n \to \infty$

Alors f_n converge vers $f : I \to \mathbb{C}$ derivable tq $f' = g$

et la convergence est uniforme sur les sous-intervalles bornés de I

Thm 2 Si (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t_0)$ a une limite quand $n \to \infty$

et (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformément vers $g : I \to \mathbb{C}$ qd $n \to \infty$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge vers $F : I \to \mathbb{C}$ derivable tq $F' = g$

et la convergence est uniforme sur les sous-intervalles bornés de I.

Reprise (avec des suites de Cauchy) de la preuve (avec des disques emboîtés) dans les notes de la Semaine 6 de Critère de Cauchy en vrac $\Rightarrow$ convergence en vrac.