Contrôle continu M242

Vendredi 16 Mars 2007. 13h30-15h30

Des réponses correctes aux deux questions de cours et aux deux premiers exercices vous assurent la note de 15/20.

N'abordez l'exercice 3 qu'une fois le reste terminé, lu relu et « reporté au propre ».
Vous êtes invités à rédiger l'exercice 3 et le rendre en devoir le Mardi 27 Mars.

Questions de cours

1. Démontrer qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur X est continue sur X.
2. Énoncer, en précisant bien les hypothèses, un théorème relatif à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.

Exercice 1 *Pour tout entier $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie par :*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(n+x)} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$.*
2. *Montrer que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.*
3. *Déduire de la question précédente que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
4. *Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, on a :*
$$\frac{p}{n(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$
5. *Calculer $F(p)$ pour tout entier p.*
6. *Déduire des questions **3** et **5**, que*
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$
7. *Montrer que*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$
[[On pourra montrer que la série de fonctions $\sum \dfrac{f_n(x)}{x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et appliquer un théorème d'interversion des limites.]]

Exercice 2 *Montrer que si une fonction f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes alors f est un polynôme.*

Exercice 3 *On désigne par* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des coefficients qui interviennent dans le développement en série entière de la fonction* $x \mapsto \sqrt{1-x}$ *sur l'intervalle* $]-1,1[$, *soit :*

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Les coefficients a_n *sont donnés par* $a_0 = 1$ *et pour* $n \geq 1$, *on a* $a_n = -\alpha_n \leq 0$ *avec (à titre d'information) :*

$$\alpha_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)\left(2^n n!\right)^2}.$$

1. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *est convergente.*
2. *En déduire que :*
   (a) *la fonction* $x \mapsto \sqrt{1-x}$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle* $[-1,1]$;
   (b) *pour tout réel* $\alpha \in [0,1]$ *les fonctions* $x \mapsto |x-\alpha|$ *et* $x \mapsto (x-\alpha)^+ = \max(0, x-\alpha)$ *sont limites uniformes de suites de polynômes sur l'intervalle* $[0,1]$;
   (c) *toute fonction continue et affine par morceaux sur* $[0,1]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes sur cet intervalle.*
3. *Montrer que toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux.*
4. *En déduire le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur* $[0,1]$ *est limite uniforme d'une suite de polynômes.*