Examen de Mat242V première session, Mardi 22 Mai 2007, 9h-12h

Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif et la notation tiendra compte de la rédaction :
Ne reporter sur la copie que des calculs et raisonnements aboutis. Recopier l'énoncé est inutile.

Question de cours (sur 3 points)

1) Soit I un intervalle réel et $f_n : I \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions.

a) Donner la définition de *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement.*

b) Prouver qu'une série normalement convergente est uniformément convergente.

Exercice (sur 3 points)

2) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ on considère $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$, $f_n(x) = n^\alpha x\, e^{-nx}$.
Soit $a > 0$ et $g_n = f_{n|[a,+\infty[} : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ la restriction de f_n à $[a, +\infty[$.

a) Prouver que pour tout $x \geq 0$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

b1) Pour quelles valeurs de α la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est normalement convergente?

b2) Pour quelles valeurs de α la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ est normalement convergente?

c) Prouver que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

T.S.V.P.

Problème première partie (sur 9 points)

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ soit $f_n, g_n : \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n+x}$, $g_n(x) = f_n(x) + f_{-n}(x)$.

Si $N \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ on pose $G_N = \dfrac{g_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} g_n = \sum_{n=-N}^{N} f_n$

3) a) Expliciter $G_N(\frac{1}{2})$. En déduire que la suite $(G_N(\frac{1}{2}))_{N\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
b) Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{Z}$ comparer $f_n(x+k)$ et $f_{n+k}(x)$, en déduire une autre expression pour $G_N(x+k) - G_N(x)$ puis que si la suite $G_N(x)$ est convergente alors la suite $G_N(x+k)$ est convergente et a même limite.

4) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $I_k = [k+\alpha, k+1-\alpha]$. Prouver que les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}^2, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$
a) sont uniformément convergentes sur $]0, 1[$.
b) ont, pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, leur restriction à I_k normalement convergentes.
En est-t-il de même pour leurs restrictions à l'union $\cup_{k\in\mathbf{Z}} I_k$ de ces intervalles?
c) Prouver que si $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ il y a $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in I_k$.

Pour $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ on note $H(x) = f_0^2(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}^2(x) + f_n^2(x)$

5) a) Déduire de ce qui précède que la suite G_N converge, vers une fonction dérivable et 1-périodique $G : \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ de dérivée $-H$.
b) Aurait-on pu prouver de même de même que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge sur $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ vers une fonction dérivable de dérivée $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$?

Problème seconde partie (sur 6 points)

Calcul des valeurs en $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ des fonctions H et G de **4)** et **5)**.

6) a) Expliciter une fonction 2π-périodique $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que si $t \in [0, 2\pi[$ on a $a(t) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} e^{ix(\pi - t)}$ et prouver que cette fonction est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On note $c_n(a), n \in \mathbf{Z}$ les coefficients de Fourier de la fonction a.
b) Les $N^{\text{ièmes}}$ sommes de Fourier de la fonction a :

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto S_N(a)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(a) e^{int}$$

convergent-elle uniformément (sur $\mathbf{R}$) quand N tend vers l'infini?
c) Déterminer les coefficients de Fourier $c_n(a), n \in \mathbf{Z}$ de la fonction a.
d) Calculer $\int_0^{2\pi} |a(t)|^2 dt$ et en déduire la valeur de la fonction H de **4)**.

7) a) Calculer la dérivée de la fonction $k : \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $k(x) = \pi \mathrm{cotg}(\pi x)$ $[= \frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}]$.
b) En déduire la valeur de la fonction G de **5)**.