Examen de Mat242V seconde session, Jeudi 21 Juin, 13h45-16h45

Question de cours

1) Soit I un intervalle réel et $f_n : I \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions.
a) *la suite de fonctions f_n converge uniformément* si il y a $f : I \to \mathbf{C}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$ il y a $N = N_\epsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $t \in I$ on a $|f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$.
Un tel f est alors unique c'est la *limite uniforme de la suite f_n.*
b) Soit $t_0 \in I$ et $\epsilon > 0$ alors si, avec les notation de a), $N = N_{\frac{\epsilon}{3}}$, comme f_N est continue en t_0 il y a $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I$ avec $|t - t_0| < \delta$ on a $|f_N(t) - f_N(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ donc $|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.
Ainsi f est continue en t_0 donc continue puisque t_0 est arbitraire dans I.

Exercice

2) a) $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{n\alpha} e^{-xt}dt = \Big[-\frac{1}{x}e^{-xt}\Big]_{t=0}^{\alpha n} = \frac{1}{x}(1 - e^{-xn\alpha}) = \frac{1}{x}(1 - (e^{-x\alpha})^n)$ qui[1] converge vers $\frac{1}{x}$ quand n tend vers l'infini : $\frac{1}{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

b) Si $x \to 0$ la suite $f_n(x) = \dfrac{1}{x}(1 - e^{-xn\alpha}) = -\dfrac{e^{-n\alpha x} - e^{-n\alpha 0}}{x}$ tend vers la dérivée en $x = 0$ de $x \mapsto -e^{-n\alpha x}$ soit $s_n = n\alpha$ et $S_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car, pour $x \in]0, +\infty[, 0 < 1 - e^{-xn\alpha} < 1$.

c1) Non puisque, comme $\alpha > 0$ on a $s_n = n\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

c2) Non d'après c1) par contraposé du théorème d'échange des limites :

THÉORÈME. — *Si une suite de fonction $f_n :]a, b[\to \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}$ converge uniformément vers $f :]a, b[\to \mathbf{C}$ et si pour chaque $n. \in \mathbf{N}$ la limite $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = s_n$ existe*

Alors les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et on a

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

d1) Pour $x \geq a > 0$ on a $0 < e^{-x\alpha} \leq e^{-x\alpha} < 1$ et $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ donc, d'après a) :

$$|g_n(x) - \frac{1}{x}| = | - \frac{-e^{-xn\alpha}}{x}| = \frac{(e^{-x\alpha})^n}{x} \leq \frac{(e^{-a\alpha})^n}{a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et g_n converge uniformément[2] vers $h : [a, +\infty[\to \mathbf{R} x \mapsto \frac{1}{x}$.

d2) Par le théorème d'échange des limite on déduit[3] de d2) que la suite S_n a un limite quand n tend vers l'infini, h a une limite quand x tend vers l'infini et des deux limites sont égales :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

.

d3) $h_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ si n est pair $h_n(x) = \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n^2}}$, si n est impair $h_n(x) = 0$.
Pour tout $\epsilon > 0$ si $n \geq \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ alors pour tout $x \geq 0$ on a $|h_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon$ donc h_n converge uniformément vers la fonction nulle, mais, si n est impair $\displaystyle\int_0^\infty h_n(x) = 0$ et si n est pair $\displaystyle\int_0^\infty h_n(x) = \left[-n^2 h_n(x)\right]_{x=0}^{+\infty} = n$, la suite $T_n = \displaystyle\int_b^{+\infty} h_n(t)dt$ n'a pas de limite.

T.S.V.P.

[1] puisque $e^{-x\alpha} \in]0, 1[$ et donc $(e^{-x\alpha})^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

[2] Dans la définition **1)**a) on peut prendre $N_\epsilon = \max(0, [\frac{\log(a\epsilon)}{-a\alpha}] + 1)$.

[3] ce qui n'est pas un scoop puisque d'après b) S_n est la suite constante 0!

Problème

3) Soit $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, h(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{t^{2m}}{(2m+1)!}$, continue car somme d'une série entière convergeant sur $\mathbf{R}$. On a $th(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)m\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sin(t)$ donc, si $t\neq 0$, on a $h(t)=\frac{\sin(t)}{t}$.

4) Comme $h(0)=1$ et pour tout $t\in\mathbf{R}, |\sin(t)|\leq|t|$, on a si $t\neq 0, |h(t)|=\frac{|\sin(t)|}{|t|}\leq\frac{|t|}{|t|}$ et h est bornée par 1. On a donc pour tout $m\leq n\in\mathbf{N}, |f_n(1)-f_m(1)|=\left|\int_{m\pi}^{n\pi}e^{-1\cdot t}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq$
$\int_{m\pi}^{n\pi}e^{-t}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt\leq\int_{m\pi}^{n\pi}e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_{t=m\pi}^{n\pi}=e^{-m\pi}-e^{-n\pi}\leq e^{-m\pi}\underset{m\to+\infty}{\to}0$,
la suite $f_n(1)$ vérifiant le critère de Cauchy est convergente.

5) a) $g_n(x)=\int_0^{n\pi}e^{-xt}\sin t dt=\int_0^{n\pi}e^{-xt}(-\cos t)'dt=\Big[-e^{-xt}\cos t\Big]_{t=0}^{n\pi}+\int_0^{n\pi}-xe^{-xt}\cos t\,dt=$
$=\Big[-e^{-xt}\cos t-xe^{-xt}\sin t\Big]_{t=0}^{n\pi}-x^2\int_0^{n\pi}e^{-xt}sint\,dt=(1-(-1)^ne^{-xn\pi})-x^2g_n(x)$. D'où :

$$g_n(x)=\frac{1-(-1)^ne^{-xn\pi}}{1+x^2}\underset{m\to+\infty}{\overset{si\ x>0}{\to}}\frac{1}{1+x^2}=g(x)$$

b2) $|g_n(x)-g_m(x)|=|\frac{(-1)^me^{-m\pi}-(-1)^ne^{-n\pi}}{1+x^2}\leq\frac{e^{-m\pi}+e^{-n\pi}}{1+x^2}\leq e^{-n\pi x}+e^{-m\pi x}$.
c) De b) il vient que si $x\geq a>0$ et $n,m\geq\frac{\log(2/\epsilon)}{a\pi}$ on a $|g_n(x)-g_m(x)|\leq\epsilon$.
Vérifiant le critère de Cauchy uniforme, la suite g_n converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
d) Non d'après la contraposée du théorème d'échanges des limites puisque la suite $\underset{0<x\to 0}{\text{Lim}}\ g_n(x)=1-(-1)^n$ n'a pas de limite quand n tend vers l'infini.

6) a0) Si $x\in]0,+\infty[$ alors $x\in]a,+\infty[$ pour un $0<a<1$ [par exemple $a=\frac{1}{2}\min(1,x)$].
a) La restriction à $]a,+\infty[$ de f_n convergeant, d'après **4)** en $x=1\in]a,+\infty[$ et, d'après **5)**c), sa dérivée $f'_{n|]a,+\infty[}$ convergeant uniformément vers $-g_a$:$]a,+\infty[\ni x\mapsto -\frac{1}{1+x^2}$ converge vers f_a dérivable de dérivée $-g_a$. Ainsi, d'après a0), f_n converge vers f dérivable de dérivée $f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$.
a2) Non car les intervalles $]a,+\infty[$ ne sont pas bornés.
a3) De **4)** et **5)**b2) vient pour tout $x\in]0,+\infty[$ et $m,n\in\mathbf{N}$ les majorations $|f_n(x)-f_m(x)|\leq$
$|f_n(1)-f_m(1)|+\left|\int_1^x-g_n(t)-(-g_m(t))dt\right|\leq|f_n(1)-f_m(1)|+\left|\int_1^x e^{-m\pi t}+e^{-n\pi t}dt\right|\leq$
$=|f_n(1)-f_m(1)|+\int_0^{+\infty}e^{-m\pi t}+e^{-n\pi t}dt=|f_n(1)-f_m(1)|+\frac{1}{m\pi}+\frac{1}{n\pi}$
Ainsi, par **4)**, f_n, vérifie le critère de Cauchy uniforme et converge donc uniformément vers f.
b) La dérivée de $f(x)+\text{arctg}(x)$ est $-g(x)+\frac{1}{1+x^2}=0$.
c) $|f_n(x)|=\left|\int_0^{n\pi}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq\int_0^{n\pi}\left|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right|dt=\int_0^{n\pi}e^{-xt}dt\leq\int_0^{\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$
donc $f_n(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.
d) Comme $\underset{x\to+\infty}{\text{Lim}}\ \text{arctg}(x)=\frac{\pi}{2}$ il suit de b) et c) que

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(x)$$

Donc $\frac{\pi}{2}=\underset{x\to 0}{\text{Lim}}\,f(x)=\underset{x\to 0}{\text{Lim}}\ \underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\ f_n(x)$.
D'après c) on peut appliquer le théorème d'inversion des limites

$$\underset{x\to 0}{\text{Lim}}\ \underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\ f_n(x)=\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\ \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\ f_n(x)=\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\ \underset{x\to 0}{\text{Lim}}\int_0^{n\pi}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt=\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

Comme si $n\leq x\leq n+1$ on a $\left|\int_{n\pi}^{x\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leq\frac{1}{n\pi}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ l'existence de la dernière limite assure que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ converge et, en suivant à rebours les égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$