Correction de l'examen de Mat242V première session, Mardi 22 Mai 2007

Question de cours

1) a) *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement* si chaque f_n est bornée et, la *norme* de f_n étant $\|f_n\| = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$, la série $\sum \|f_n\|$ des normes des f_n converge.
b) La série $\sum \|f_n\|$, étant convergente, vérifie le critère de Cauchy donc

pour tout $\epsilon > 0$ il y a N tel que si $N \le m \le n \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \|f_k\| \le \epsilon$.

Comme pour tout $x \in I$ et $k \in \mathbf{N}$ on a $|f_k(x)| \le \|f_k\|$ il vient

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\Big| \le \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m}^{n} \|f_k\| \le \epsilon \quad \text{et donc} \quad \Big\|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\Big\| \le \epsilon$$

ainsi la série $\sum f_n$, vérifiant le critère de Cauchy uniforme, est uniformément convergente.

Exercice

2) a) On a pour tout $n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$, $f_n(0) = 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ est donc convergente.

Si $x>0$, en étudiant les variations sur $[1, +\infty[$ de la fonction $y \mapsto y^\alpha x e^{-y\frac{x}{2}}$ on a :
$0 < f_n(x) = n^\alpha x e^{-n\frac{x}{2}} e^{-n\frac{x}{2}} \le \max(1, \left(\frac{2\alpha}{x}\right)^\alpha e^{-\alpha}) x \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^n$. De terme général positif majoré par

celui d'une série géométrique de raison $e^{-\frac{x}{2}} \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est convergente.

b1) Le maximum de la fonction f_n est atteint pour $x = \frac{1}{n}$ donc $\|f_n\| = n^{\alpha-1}e^{-1}$.
La série $\sum \|f_n\|$ des normes des f_n est donc convergente si et seulement si $\alpha < 0$.
b2) Pour $x \in [a, +\infty[$ et $n \ge \frac{1}{a}$ on a $0 \le f_n(x) \le f_n(a)$, ainsi $\|g_n\| = f_n(a)$ et donc, d'après a), la série $\sum g_n$ est normalement convergente pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.
c) D'après b2) pour tout $a>0$ la série de fonctions continues $\sum g_n$ est uniformément convergente donc continue. Sa somme étant la restriction à $[a, +\infty[$ de $\sum f_n$ et si $x > 0$ et $a = \frac{x}{2}$ on a,

$x \in]a, +\infty[\subset [a, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Problème première partie

3) a) Commet $-(n+1) + \frac{1}{2} = -n - \frac{1}{2} = -(n + \frac{1}{2})$, si $0 \le n < N$ on a $f_{-(n+1)}(\frac{1}{2}) + f_n(\frac{1}{2}) = 0$ et

$$G_N(\frac{1}{2}) = \sum_{n=-N}^{N} f_n(\frac{1}{2}) = \sum_{n=-N}^{-1} f_n(\frac{1}{2}) + \sum_{n=0}^{N-1} f_n(\frac{1}{2}) + f_N(\frac{1}{2}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f_{-(n+1)}(\frac{1}{2}) + f_n(\frac{1}{2}) + \frac{2}{2N+1} = \frac{2}{2N+1}$$

qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

b) $f_n(x+k) = \frac{1}{n+(x+k)} = \frac{1}{(n+k)+x} = f_{n+k}(x)$ et si $N > k \ge 0$, alors $G_N(x+k) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} f_n(x+k)$

$$= \sum_{n=-N}^{N} f_{n+k}(x) = \sum_{n=k-N}^{k+N} f_n(x) = -\sum_{n=-N}^{k-(N+1)} f_n(x) + \sum_{n=-N}^{N} f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{k+N} f_n(x) = -\sum_{n=-N}^{k-(N+1)} f_n(x) +$$

$G_N(x) + \displaystyle\sum_{n=N+1}^{k+N} f_n(x)$ et donc $G_N(x+k) - G_N(x) = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{k+N} f_n(x) - \sum_{n=-N}^{k-(N+1)} f_n(x)$ d'où,

comme si $k \le 0$ on a $G_N(x+k) - G_N(x) = -\Big(G_N((x+k) + (-k)) - G_N(x+k)\Big)$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, si $N > |k| + |x|$, $\Big|G_N(x+k) - G_N(x)\Big| \le 2\frac{|k|}{N-(|k|+|x|)}$ qui tend vers 0 quand[1] N tend vers l'infini.
Ainsi si la suite $G_N(x)$ est convergente alors la suite $G_N(x+k)$ est convergente et a même limite.

[1] à x et k fixé

4) a) Pour $x \in]0,1[$ et $n \geq 0$ on a $0 \leq f_{-n}^2(x), f_n^2(x) \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)^2$ donc, si $q \geq p \geq N \geq 3$ alors $\sum_{n=p}^{q} f_{-n}^2(x), \sum_{n=p}^{q} f_{-n}^2(x) \leq \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{(n-2)} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{N-2}$ et les deux séries vérifient le critère de Cauchy uniforme et sont donc uniformément convergentes.

b) Si $x \in I_k$ on a $|f_n^2(x)|, |f_{-n}^2(x)| \leq \min(\frac{1}{(n-|k|+\alpha)^2}, \frac{1}{(n-|k|+1-\alpha)^2}) = \frac{1}{(n-|k|+\alpha)^2}$.

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-|k|+\alpha)^2}$ est convergente, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}^2, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ ont leurs restrictions à I_k normalement convergentes.

La norme des restrictions de f_n^2 et f_{-n}^2 à l'union $\cup_{k\in\mathbf{Z}} I_k$ est $\frac{1}{\alpha^2} = f_n^2(-n+\alpha) = f_{-n}^2(n+\alpha)$, indépendante de n et non nulle, n'est pas terme général d'une série convergente donc la restriction à $\cup_{k\in\mathbf{Z}} I_k$ de chacune des deux séries n'est pas normalement convergente.

c) On prend $k = [x]$ la partie entière de x et $\alpha = \min(x - [x], 1 - (x - [x]))$.

5) On remarque que pour chaque $n \in \mathbf{Z}$ la fonction f_n est dérivable de dérivée $f_n' = -f_n^2$. D'après **3)** en chaque milieu $\frac{1}{2} + k$ de I_k la suite de fonction G_N est convergente. D'après **4)** b) la suite dérivée $G_N' = -\sum_{n=-N}^{N} f_N^2$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur I_k.

L'intervalle I_k étant borné le théorème de convergence uniforme des fonctions dérivables[2] assure que la suite G_N converge uniformément sur I_k vers une fonction dérivable de dérivée la restriction de $-H$ à I_k. De **4)** c) il suit que la suite G_N converge, vers une fonction dérivable $G : \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ de dérivée $-H$ et de **3)** b) que cette fonction limite G est 1-périodique.

b) Non car si la série dérivée est toujours uniformément convergente sur chaque intervalle I_k il y a aucun point $x \in I_k$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en ce point, puisque si $x \in I_k$ on a, pour $n > |k|, f_n(x) > \frac{1}{n-|k|}$ terme général d'une série à termes positifs divergente.

Problème seconde partie

6) a) Si, pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$, alors $a(t) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} e^{ix(\pi - 2\pi\{\frac{t}{2\pi}\})}$.

Cette fonction est intégrable sur $[0, 2\pi]$, car hors de l'extrémité $\{2\pi\}$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction a est égale à une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 2\pi]$.

b) Non puisque la fonction a n'est pas continue alors que les $N^{\text{ièmes}}$ sommes de Fourier le sont.

c) $c_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi x)} e^{ix(\pi-t)} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2\pi\sin(\pi x)} e^{ix\pi-(x+n)t} dt$
$= \frac{1}{2\sin(\pi x)} \frac{1}{-i(x+n)} (e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) = \frac{1}{\sin(\pi x)} \frac{1}{i(x+n)} \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})}{2i} = \frac{1}{n+x} = f_n(x)$

d) $\int_0^{2\pi} |a(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} dt = 2\pi \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$. Donc

$$H(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(a)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |a(t)|^2 dt = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$$

7) a) $k'(x) = \pi\pi \frac{-\sin(\pi x)\sin(\pi x) - \cos(\pi x)\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

b) La fonction k ayant même valeur $k(\frac{1}{2}+l) = 0 = G(\frac{1}{2}+l)$ que G au milieu de chaque intervalle $I_l =]l, l+1[, l \in \mathbf{Z}$ formant $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ et, d'après a) et **6)** d) même dérivée $-H$ que G est égale à G :

$$G(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n+x} = \pi\mathrm{cotg}(\pi x)$$

[2] dont la suite des dérivées converge uniformément et qui converge en un point.