Devoir 3 à rendre le mardi 17 Avril 2007 :

I Un théorème d'approximation des fonctions continues

On note E l'espace vectoriel réel des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues et 2π-périodiques : pour tout $x \in \mathbf{R}, f(x+2\pi) = f(x)$.

Une application linéaire $L : E \to E$ est *positive ou nulle* si pour tout $f \in E$ telle que pout tout $x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ alors pour tout $x \in \mathbf{R}, L(f)(x) \geq 0$.

1) Soit $f \in E$ Prouver a) qu'il y a $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $|f(x)| \leq M$.
b) que si $\epsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ alors il y a $\delta > 0$ tel que $\sin(\frac{\delta}{2}) \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$(1) \qquad -\epsilon - \frac{2M}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\sin^2(\frac{x-\alpha}{2}) \leq f(x) - f(\alpha) \leq \frac{2M}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\sin^2(\frac{x-\alpha}{2}) + \epsilon$$

2) a) Prouver que si $\varphi_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \varphi_\alpha(x) = \sin^2(\frac{x-\alpha}{2})$ alors $f_\alpha \in E$. En déduire que
b) *Si $L_n : E \to E$ est une suite d'applications linéaires positives ou nulle telles que*

(i) *pour tout $n, L_n(1)=1$*

$(iii)_\alpha$ $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{Lim}} L_n(\varphi_\alpha)(\alpha)=0$ $(=\varphi_\alpha(\alpha))$.

alors pour tout $f \in E$ la suite $L_n(f)(\alpha)$ converge vers $f(\alpha)$. [considérer $L_n(f - f(\alpha))$]

3) Soit $L_n : E \to E$ une suite d'applications linéaires positives ou nulles telles que :
(i) pour tout $n, L_n(1)=1$.
(ii) les suites $L_n(\cos)$ et $L_n(\sin)$ convergent vers cos et sin respectivement.
Prouver que pour tout $f \in E$ la suite $L_n(f)$ converge vers f et que la convergence est uniforme si la convergence dans (ii) est uniforme.

4) a) Prouver que $L_n : E \to E, L_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}dy$ vérifie la condition (ii) avec convergence uniforme.
b) Peut on en déduire à l'aide de **3)** que pour tout $f \in E$:
b1) les sommes partielles $S_n(f)$ de la série de Fourier de f convergent vers f.
b2) leurs moyennes de Césaro $\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ convergent uniformément vers f?
Détailler la déduction si la réponse à b1) et/ou b2) est oui.

Compléter éventuellement ce devoir par **3)** et **4)** du TD 5, ou **6** du TD 6 qui sont rappelés au verso (ou tout autre exercice des feuilles de TD qui n'ont pas été traité en TD et que vous préfèreriez).

Extraits de TD 5 et TD 6

Conséquences du théorème de Weierstrass

3) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une application continue telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ on ait $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$. Prouver que $f = 0$.

4) Soit $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$, pour $n \in \mathbf{N}$ on considère l'intégrale $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-\omega t} dt$.
a) Prouver que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ l'intégrale I_n est convergente.
b) Etablir pour n positif la relation de récurrence $I_n = \frac{n}{\omega} I_{n-1}$.
c) En déduire la valeur $I_n = \frac{n!}{\omega^{n+1}}$, puis :
d) Pour tout entier naturel $m \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\int_0^\infty t^{4m+3} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) dt = 0$.
e) Déduire de d) que si $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, f(x) = e^{-x^{\frac{1}{4}}} \sin(x^{\frac{1}{4}})$, alors pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ la fonction $x^n f(x)$ est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f(x) dx = 0$.
[on pourra effectuer le changement de variable $x = \frac{t^4}{4}$].

Majoration de la dérivée d'un polynôme trigonométrique

6) Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n$ un polynôme trigonométrique de degré au plus N.
a) Prouver que si $|m| > N$ alors $P * e_m = 0$.
b) On note $K_{N-1} = \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-k}^{k} e_n$ le noyau de Fejer de degré $N - 1$.
Montrer (en ne se contentant pas de remplacer n par $N - 1$ dans les formules du cours!)

$$K_{N-1}(x) = \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N}) e_k = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right\}^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{N-1}(x) dx = 1$$

c) Déduire, si $L(x) = 2NK_{N-1}(x) \sin(Nx)$, de a) et la première formule de b) la relation

$$P' = -P * L$$

d) Déduire des deux dernières formules de b) la majoration $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |L(x)| dx \leq 2N$.
e) Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a la majoration :

$$|P'(x)| \leq 2N \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |P(t)|$$