Devoir 1 à rendre le mardi 27 Février 2007 :

I Convergence uniforme continuité et intégration

application directe du cours devrait être fait par tous les étudiants

1) a) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Par sommation d'Abel calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} nx^n$.

b) Retrouver le résultat de a) en considérant la dérivée de la fonction $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^n$.

c) Prouver que, si $x \in]-1,1[$ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ converge, donner, en fonction de x, une estimation de la valeur absolue $|r_N(x)|$ du reste $r_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n - \sum_{n=0}^{N} nx^n$.

Soit $0 \leq r < 1$. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ converge uniformément sur $[-r, r]$.

2) a) Prouver que si $t \in \mathbf{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nte^{-nt^2}$ converge et calculer sa somme $s(t)$.

b) A partir de l'expression trouvée en a), vérifier que s n'est pas continue en 0 et b') déterminer l'ensemble $C = \{t \in \mathbf{R}\ ; s \text{ est continue en } t\}$.

c) Indépendamment de b') déduire de **1)** c) que si $t \neq 0$ alors s est continue en t.

d) Déduire de b) que la convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nte^{-nt^2}$ n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$.

e) Sans utiliser b), prouver d) directement.

3) a) Prouver que pour tout $t \in \mathbf{R}$ la suite $f_n(t) = nte^{-nt^2}$ converge vers 0.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. En déduire une autre preuve de **2)** d).

c) Prouver que, si $\epsilon > 0$, la série $\sum f_n(t)$ converge normalement sur $[\epsilon, +\infty[$.

II Un exemple de série entière convergeant uniformément mais non absolument

1) a) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Calculer $S_k = e^{-i\frac{\theta}{2}} \sum_{l=1}^{k} e^{i\,l\,\theta}$ et sa partie imaginaire $\Im(S_k)$.

b) Etablir, si $0 < \alpha \le \pi$ la minoration $\frac{\alpha}{\pi} \le \sin(\frac{\alpha}{2})$. En déduire les majorations

$$\frac{\sin^2(k\frac{\theta}{2})}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \frac{1}{k(k+1)} \le \frac{\pi}{4} \min(\theta, 2\pi - \theta) \frac{k}{k+1} \le \frac{\pi}{4} \min(\theta, 2\pi - \theta)$$

c) Soit $\alpha = \min(\theta, 2\pi - \theta)$. En coupant, si $n > \frac{\pi}{\alpha}$, la somme à l'entier k_0 tel que $(k_0 - 1)\,\alpha < \pi \le k_0\,\alpha$, établir la majoration :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(k\frac{\theta}{2})}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{\sin^2(n\frac{\theta}{2})}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \frac{1}{n+1} \le \min(2n\frac{\pi}{4}\alpha, \frac{\pi^2}{4} + 1) \le \frac{\pi^2}{2}$$

2) Soit le polynôme

$$P_n(z) = -\frac{z}{n} - \cdots - \frac{z^n}{1} + \frac{z^{n+1}}{1} + \cdots + \frac{z^{2n}}{n} = -\sum_{l=0}^{n-1} \frac{z^{l+1}}{n-l} + \sum_{m=1}^{n} \frac{z^{n+m}}{m}$$

et $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(\theta) = P_n(e^{i\theta})$.

a) Prouver, si $\theta \in \mathbf{R}$ et $e^{i\,\theta} \ne 1$ on a $f_n(\theta) = e^{i\,(n+\frac{1}{2})\,\theta} 2\,\Im\left(e^{-i\,\frac{\theta}{2}} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\, e^{i\,m\,\theta}\right)$.

b) Par sommation d'Abel en déduire

$$|f_n(\theta)| = 2\,[\sum_{k=1}^{n} \frac{(\sin\frac{k\,\theta}{2})^2}{|\sin\frac{\theta}{2}|} \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{(\sin\frac{n\,\theta}{2})^2}{|\sin\frac{\theta}{2}|} \frac{1}{n+1}]$$

c) Déduire de **1)** c) que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ on a $|f_n(\theta)| \le \pi^2$.

3) Soit la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ où $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et, si $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\sum_{k=2^{n+1}+1}^{2^{n+2}} a_k\, z^k = \frac{1}{(n+1)^2}\, z^{2^{n+1}}\, P_{2^n}(z)$$

a) Etablir que si $|z| \le 1$ et $2^{n+1} < m \le 2^{n+2}$ on a

$$\sum_{k=2^{n+1}+1}^{m} |a_k\, z^k| \le 2\frac{1 + n\log(2)}{(n+1)^2} \le \frac{2}{n+1}$$

b) Déduire de **2)** que la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ converge uniformément, d'abord sur le cercle unité $\{z \in \mathbf{C}\,;|z| = 1\}$, puis sur le disque unité fermé $\{z \in \mathbf{C}\,;|z| \le 1\}$.

c) Prouver $\sum_{k=2^{n+1}+1}^{2^{n+2}} |a_k| \ge 2\frac{n\log(2)}{(n+1)^2}$. En déduire $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = +\infty$ puis que :

La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, z^k$ *converge uniformément mais non absolument dans le disque unité fermé* $\{z \in \mathbf{C}\,;|z| \le 1\}$.