06/02/07

Relations sur un ensemble

I Relations

1 Relations binaires

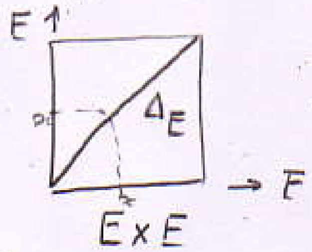
a) def une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est la donnée d'une partie $\Gamma_{\mathcal{R}} \subset E \times E$ le graphe de $\mathcal{R}$.

On dit que x et y (éléments de E) $\left\{ \begin{array}{l} \text{sont liés par} \\ \text{vérifient} \end{array} \right\}$ la relation $\mathcal{R}$ si $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ et on note $x \mathcal{R} y$

Exemples ① $\mathcal{R}$: "=" relation égalité

$$\Gamma_{=} = \{(x,y) \in E \times E \mid x = y\} = \{(x,x) \in E \times E \mid x \in E\}$$

$$\underset{\text{Notation}}{=} \Delta_E \text{ la diagonale de } E$$



② $E = \mathcal{P}(X)$ ensemble des parties d'un ens. X

$\mathcal{R}$: $\subset$ inclusion $\Gamma_{\subset} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subset B\}$

$\Updownarrow$ Rappel

$\forall a \in A$ on a $a \in B$

③ $E = V$ espace vectoriel réel

$\mathcal{R} = \mathcal{L}$ "être liés" $\Gamma_{\mathcal{L}} = \left\{ (u, v) \in V \times V \;\middle|\; \begin{array}{c} u \text{ et } v \text{ sont liés} \\ \Updownarrow \text{ Rappel} \\ \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda, \mu) \neq (0,0)\ \lambda . u + \mu . v = 0 \end{array} \right\}$

Exercice Si $E = \mathbb{R}^2$ $\Gamma_{\mathcal{L}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0 \right\}$

b] Propriétés d'une relation binaire.

définition Une relation binaire sur un ensemble E est

réflexive si $\forall x \in E$ on a $x \mathcal{R} x$

Rmq $\mathcal{R}$ reflexive $\Leftrightarrow$ $\Delta_E \subset \Gamma_{\mathcal{R}}$

Exercice Les exemples ①, ② et ③ sont des relations reflexives.

symétrique si $\forall x, y \in E$ $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

Exemple Les exemples ① et ③ sont symétriques mais si $X \neq \emptyset$ ② ne l'est pas

p.o. pour ② $\forall B \in \mathcal{P}(X)$ on a $\emptyset \subset B$ mais $B \subset \emptyset$ seulement si $B = \emptyset$

donc si $X \neq \emptyset$ on peut prendre $B = X \neq \emptyset$ et $A = \emptyset$ on a $\emptyset \subset X$ mais non$(X \subset \emptyset)$ □

antisymétrique si $\forall x, y \in E$ $\big((x \mathcal{R} y)$ et $(y \mathcal{R} x)\big) \Rightarrow x = y$

Exemple ① et ② sont antisymétriques mais si $E \neq \{0\}$ ③ ne l'est pas

plus généralement $=$ est la seule relation à la fois

reflexive symétrique et antisymetique

comme ③ est reflexive symétrique il suffit de montrer si $V \neq \{0\}$

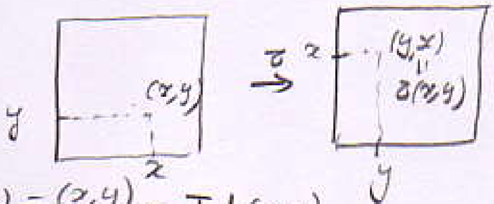
$\mathcal{L}$ n'est pas $=$ mais si $0 \neq v \in E$ on a $1.0 + 0.v = 0$ donc

(comme $(1,0) \neq (0,0)$) on a $0 \mathcal{L} v$ □

<u>Remarques</u> L'échange des coordonnées ou symétrie de $E\times E$

$$\tau : E\times E \to E\times E,\ \tau(x,y)=(y,x)$$

vérifie $\tau\circ\tau = Id_{E\times E}$

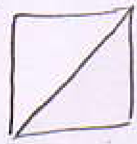


pv $\tau\circ\tau(x,y) \underset{\text{def de } \tau}{=} \tau(\tau(x,y)) = \tau(y,x) = (x,y) = Id(x,y)$

a) R symétrique $\Leftrightarrow \tau(\Gamma_R) \subset \Gamma_R \Leftrightarrow \tau(\Gamma_R) = \Gamma_R$

exercice utilisant $\tau\circ\tau = Id_{E\times E}$

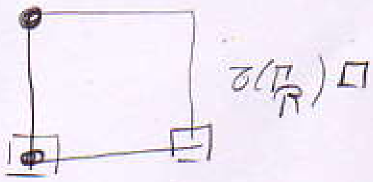
b) $\Delta_E = \{(x,y)\in E\times E \mid \tau(x,y)=(x,y)\}$ ens. des points fixes de τ



c) R antisymétrique $\Leftrightarrow \Gamma_R \cap \tau(\Gamma_R) \subset \Delta_X$

il y a égalité si et seulement si R est aussi reflexive

Exemple $E=\{0,1\}$ $\Gamma_R = \{(0,0),(0,1)\}$ Γ_R •



$(1,1)\in\Delta_E$ mais $(1,1)\notin \Gamma_R\cap\tau(\Gamma_R) = \{(0,0)\}$

transitive si $\forall x,y,z\in E$

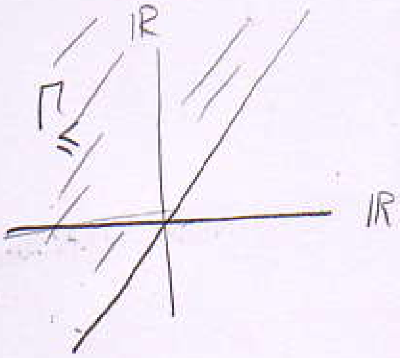
$$\big((xRy) \text{ et } (yRz)\big) \Rightarrow xRz$$

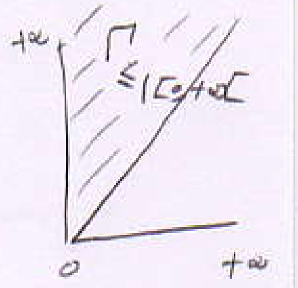
Exemples ① et ② sont transitives mais si V contient une famille libre (u,v) à deux éléments ③ n'est pas transitive : on a $\big((u\,\mathcal{R}\,0) \text{ et } (0\,\mathcal{R}\,v)\big)$ mais non $(u\,\mathcal{R}\,v)$

<u>def</u> Si R est une relation binaire sur E et $F \subset E$
la relation R_F induite de R sur la partie F de E
est la relation de graphe

$$\Gamma_{R_F} = \Gamma_R \cap F \times F = \{(z,t) \in F \times F \mid (z,t) \in \Gamma_R\}$$

<u>Exemple</u> $E = \mathbb{R}$ $R : \leqslant$
$F = [0, +\infty[$





<u>Remarque</u> Soit $F \subset E$ et R une relation sur E qui est reflexive (resp. symétrique, resp. antisymétrique, resp. transitive) alors R_F est reflexive (resp. symétrique, resp. antisymétrique, resp. transitive)

pv : Exercice

<u>Exercice</u> $E = V$ espace vectoriel réel $F = V \setminus \{0\} \subset V = E$
alors $\mathcal{L}_F$ est transitive.

2 Relations correspondances et applications

<u>def</u> une relation R entre les élements de n ensembles $E_1, \dots, E_n$ est la donnée d'une partie $\Gamma_R \subset E_1 \times \dots \times E_n$, le graphe de R
si $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_R$ on note $R(x_1, \dots, x_n)$

<u>Exemple</u> Soit V un espace vectoriel réel et $E_1 = E_2 = \dots = E_n = V$

la relation "être liés" est de graphe

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \{(v_1, \dots, v_n) \in V \times \dots \times V \mid \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = 0\}$$

Dans ce cadre plus général on ne peut parler des propriétés de réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.

Mais, si $n \geq 2$, (et $0 < p < n$), on peut se ramener au cas $n = 2$ en identifiant $E_1 \times \dots \times E_n$ à $(E_1 \times \dots \times E_p) \times (E_{p+1} \times \dots \times E_n)$

par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1, \dots, x_p), (x_{p+1}, \dots, x_n))$

<u>def</u> une <u>correspondance d'un ensemble A vers un ensemble B</u> est une relation entre les éléments de A et B

<u>Exemples</u> 1) Si $A = E = B$ une correspondance de E vers E est une relation binaire sur E

2) Si $f : A \to B$ est une application, son graphe

$$\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$$

est celui d'une correspondance

Z la réciproque n'est pas vraie car si $\Gamma_R \subset A \times B$ est graphe d'une correspondance il peut y avoir des $a \in A$ avec soit $\begin{cases} \text{aucun } b \in B \text{ avec } (a, b) \in \Gamma_R \\ \text{plus d'un } b \in B \text{ t.q. } (a, b) \in \Gamma_R \end{cases}$

On peut cependant définir deux <u>applications</u>

$$f_{\mathcal{R}} : A \to \mathcal{P}(B) \quad a \mapsto \{b \in B \mid (a,b) \in \Gamma_{\mathcal{R}}\}$$

$$\mathcal{P}f_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \quad \underset{A}{\overset{X}{\cap}} \mapsto \underbrace{\{b \in B \mid \exists\, x \in X\ (x,b) \in \Gamma_{\mathcal{R}}\}}_{= f_{\mathcal{R}}(X)}$$

et si $\mathcal{S}$ est une correspondance de B vers C on définit la <u>correspondance composée</u> $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de A vers C par

$$\Gamma_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B \text{ t.q. } (a,b) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \text{ et } (b,c) \in \Gamma_{\mathcal{S}}\}$$

<u>Exercices</u> ① $f_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \mathcal{P}f_{\mathcal{S}} \circ f_{\mathcal{R}} : A \to \mathcal{P}(C)$

$$A \xrightarrow{f_{\mathcal{R}}} \mathcal{P}(B) \xrightarrow{\mathcal{P}f_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}(C)$$

$$\mathcal{P}f_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \mathcal{P}f_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{P}f_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(C)$$

$$\mathcal{P}(A) \xrightarrow{\mathcal{P}f_{\mathcal{R}}} \mathcal{P}(B) \xrightarrow{\mathcal{P}f_{\mathcal{S}}} \mathcal{P}(C)$$

② Si $A = E = B$ ($\mathcal{R}$ est donc une relation binaire)

$\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\Gamma_{\mathcal{R}\circ\mathcal{R}} \subset \Gamma_{\mathcal{R}}$

II Relations d'ordre

1 Définition et exemples

(on dit en abrégé un ordre)

déf. une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive

On note $\prec$ (ou $\prec_{\mathcal{R}}$ s'il y a plusieurs relations d'ordre dans le contexte) une telle relation d'ordre et dit que $(E, \prec_{\mathcal{R}})$ est un ensemble ordonné.

Traduction de la définition $\prec$ est une relation d'ordre ssi

$$\forall x, y, z \in E \quad \begin{cases} x \prec x \\ (x \prec y) \text{ et } (y \prec x) \Rightarrow x = y \\ (x \prec y) \text{ et } (y \prec z) \Rightarrow x \prec z \end{cases}$$

Ex 1 $\subset$ est une relation d'ordre sur $E = \mathcal{P}(X)$:

pr $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ $\quad A \subset A \quad (\forall a \in A \;\; a \in A)$

$((A \subset B) \text{ et } (B \subset A)) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A \; a \in B$ et $\forall b \in B \; b \in A \Leftrightarrow A = B$

déf de = pour les ens.

$(A \subset B)$ et $(B \subset C)$ donc $\forall a \in A$ on a $a \in B$ et $\forall b \in B$ on a $b \in C$ $\Rightarrow$ $\forall a \in A$ on a $a \in C$ en prenant $b = a$ c.a.d $A \subset C$ $\boxtimes$

Ne pas confondre le symbole $\prec$ pour une relation d'ordre, qui pour l'ordre usuel de $\mathbb{R}$ s'écrit $\leq$

avec la relation $<$ dans $\mathbb{R}$ qui est

$$(x \leq y) \text{ et } (x \neq y)$$

Plus généralement si $\prec$ est une relation d'ordre sur un ens. E

la relation $(x \prec y)$ et $(x \neq y)$

n'est pas une relation d'ordre puisqu'elle n'est pas reflexive

(Sauf dans le cas $\leq$ dans $\mathbb{R}$) on notera

$$(x \prec y) \text{ et } (x \neq y) \text{ par } x \underset{\neq}{\prec} y$$

<u>Exemple</u> l'inclusion stricte de A dans B $(A, B \in \mathcal{P}(X))$

se note $A \subsetneq B$

Lemme et def Si $\prec$ est un ordre sur E et $x \succ y$ ssi $y \prec x$

alors $\succ$ est un ordre sur E dit $\left\{ \begin{array}{l} \text{inverse} \\ \text{ou opposé} \end{array} \right\}$ de l'ordre $\prec$

pr transitivité $(x \succ y)$ et $(y \succ z) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (y \prec x)$ et $(z \prec y) \Leftrightarrow (z \prec y)$ et $(y \prec x)$

commutativité de et

$\Downarrow$ transitivité de $\prec$

$$x \succ y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} z \prec x$$

réflexivité, antisymétrie : exercice

__def__ Soient E et F deux ensembles munis d'ordre $\prec_E$ et $\prec_F$

une application $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$ est croissante

[abrégé en $f : E \to F$ si les ordres sont clairs par le contexte]

si $\forall x, y \in E \quad x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$

un isomorphisme d'ensemble ordonné (ou d'ordres) si de plus il y a

$g : (F, \prec_F) \to (E, \prec_E)$ croissante tq $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

__Rmq__ Si f est un isomorphisme alors f est bijective et $g = f^{-1}$ est la bijection inverse

__Proposition__ Si $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$ et $g : (F, \prec_F) \to (G, \prec_G)$ sont croissantes alors $g \circ f : (E, \prec_E) \longrightarrow (G, \prec_G)$ est croissante

$$\begin{tikzcd}
(E, \prec_E) \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr] & & (G, \prec_G) \\
& (F, \prec_F) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

__def__ $f : (E, \prec_E) \to (F, \prec_F)$ est décroissante si $f : (E, \prec_E) \to (F, \succ_F)$ est croissante

[càd $\forall x, y \in E \quad (x \prec_E y) \Rightarrow f(x) \succ_F f(y) \Leftrightarrow f(y) \prec_F f(x)$]

Exercice (1) La proposition est-elle vraie avec décroissante au lieu de croissante?

(2) Soit $B \in \mathcal{P}(X)$ $\quad u_B, \eta_B, c_B : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$)

$u_B(A) = A \cup B$, $\eta_B(A) = A \cap B$, $c_B(A) = B \setminus A$ $\left(= \{b \in B \mid b \notin A\}\right)$

prouver que u_B et η_B sont croissantes et que c_B est décroissante.

definition un ordre $\prec_E$ sur E est total si

$\forall x, y \in E$ soit $x \prec_E y$ soit $y \prec_E x$ $(\Leftrightarrow x \succ_E y)$

Exemple $\leqslant$ est total sur $\mathbb{R}$

mais $\subset$ n'est pas total sur $\mathcal{P}(\{0,1\})$:

$\{0\}, \{1\} \in \mathcal{P}(\{0,1\})$ mais non$(\{0\} \subset \{1\})$ et non$(\{1\} \subset \{0\})$

2 Bon ordre et récurrence

Lemme1et def Soit $m_1, m_2 \in A$ partie d'un ens. ordonné $(E, \prec_E)$

tq $\forall a \in A$ on a $m_1 \prec a$ et $m_2 \prec a$ alors $m_1 = m_2$

un tel m_1 (s'il existe) est dit le plus petit élément de A

et est noté $m(A)$

pr $\begin{array}{l} a = m_2 \in A \Rightarrow m_1 \prec m_2 \\ a = m_1 \in A \Rightarrow m_2 \prec m_1 \end{array} \Bigg| \underset{\text{antisymétrie de } \prec}{\Rightarrow} m_1 = m_2$

<u>def</u> un <u>bon ordre</u> sur un ens. E est un ordre sur E t.q. toute partie non vide $\emptyset \neq A \subset E$ a un plus petit élément

<u>Lemme</u> 2 un bon ordre est un ordre total

pv $\forall x, y \in E \quad m(\{x,y\}) \in \{x,y\}$ donc

soit $x = m(\{x,y\}) \prec y$

soit $y = m(\{x,y\}) \prec x$

$\boxed{1}$ La réciproque n'est pas vraie : $\leq$ est total sur $\mathbb{Z}$ mais $\emptyset \neq \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ n'a pas de plus petit élément puisque $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n-1 \in \mathbb{Z}$ et non$(n \leq n-1)$

(puisque $n-1 \leq n$ et $n-1 \neq n$)

$\boxed{2}$ On admet (puisque l'on a défini ni $\mathbb{N}$, ni $\leq$!!!) que $\leq$ est un bon ordre sur $\mathbb{N}$ et $0 = m(\mathbb{N})$

<u>Théorème</u> Soit E un ensemble muni d'un bon ordre $<_E$
et $P(x)$ un énoncé dépendant de $x \in E$ t.q.

$$\forall x \in E \ \left(\forall y \in E \ y \lneq x \ P(y) \text{ vrai} \right) \Rightarrow P(x) \text{ vrai}$$

Alors $\forall x \in E \quad P(x)$ est vrai

pv par contraposée

$\exists x$ t.q. $P(x)$ faux $\Rightarrow \emptyset \neq \{x \in E \mid P(x) \text{ faux}\} = F \subset E$

Soit $x_0 = m(F)$ donc $\forall y \in E \quad y \lneq x_0 \quad P(y)$ est vrai

et $P(x_0)$ est faux c.a.d.

$$\text{non}\left(\forall x \in E \ \left(\forall y \in E \ y \lneq x \ P(y) \text{ vrai} \right) \Rightarrow P(x) \text{ vrai} \right) \quad \square$$

<u>Rmq</u> On semble ne pas avoir « initialiser la récurrence »
en fait si car dans le pas de récurrence pour $x = m(E)$
il n'y a pas de $y \in E \quad y \lneq x = m(E)$
l'hypothèse est donc vide mais il faut avoir
la conclusion c.a.d. $P(m(E))$.