30/01/2007

2 Espaces vectoriels de fonctions (k fois dérivables).

$$E_1 = \{ z : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid z \text{ dérivable} \} \subset E_0 = \{ z : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$$

$$\left. \begin{array}{lll} z_1, z_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} & z_1 + z_2 : t \mapsto z_1(t) + z_2(t) \\ \lambda \in \mathbb{C} & \lambda \cdot z_1 : t \mapsto \lambda \cdot z_1(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_0 \text{ est un} \\ \text{espace vectoriel} \\ \text{(complexe)} \end{array}$$

E_1 est sous-espace vectoriel de E_0

$$\left. \begin{array}{ll} D^1 = D : E_1 \longrightarrow E_0 & D(z) = z' \\ D^0 = Id : E_0 \longrightarrow E_0 & D^0(z) = z \end{array} \right\} \text{sont linéaires}$$

$1 \leq k \in \mathbb{N}$ l'espace des fonctions k fois dérivables E_k

application linéaire dérivée $k^{\text{ième}}$ $D^k : E_k \longrightarrow E_0$

$$E_{k+1} = \left(D^k\right)^{-1}(E_1) \quad \left(= \left\{ z \in E_k \;\middle|\; \begin{array}{l} D^k(z) \in E_1 \\ \text{c.a.d. } D^k(z) \text{ dérivable} \end{array} \right\} \right)$$

$$D^{k+1} = D \circ D^k : \begin{tikzcd} E^{k+1} \arrow[rr] \arrow[dr, "D^k"'] & & E_0 \\ & E_1 \arrow[ur, "D"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Notation</u> $z \in D^k$ $\quad D^k(z) = z^{(k)}$ dérivée k^{ieme} de z

<u>Rmq</u> $\forall z \in E_k \quad D^k(z) = \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{k \text{ fois}}(z)$

donc si $l \in \mathbb{N}$

$$D^{k+l}(z) = \overbrace{\underbrace{D \circ \dots \circ D}_{l \text{ fois}} \circ \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{k \text{ fois}}}^{k+l \text{ fois}}(z) = D^l\left(D^k(z)\right)$$

associativité de $\circ$!

la dérivée $k+l^{\text{ieme}}$ est la dérivée l^{ieme} de la dérivée k^{ieme}

<u>Rappels</u> $f, g : E \to F$ linéaires ; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\lambda f + \mu g : E \to F, \quad v \mapsto \lambda f(v) + \mu g(v)$$

est linéaire et si $h : D \to E$ et $k : F \to G$ sont linéaires

(1) $(\lambda f + \mu g) \circ h = \lambda f \circ h + \mu g \circ h :$
$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr] \arrow[dr, "h"'] & & F \\ & E \arrow[ur, "\lambda f + \mu g"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $k \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot k \circ f + \mu\, k \circ g :$
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda f + \mu g"'] & & G \\ & F \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

3. Application linéaire L_Q associée à un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$

$$Q = \alpha_m X^m + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X] \quad (m \in \mathbb{N};\ \alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C})$$

$$(p \in \mathbb{N}) \qquad L_Q = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k D^k : E_{m+p} \to E_p,\ \mathfrak{z} \mapsto \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \mathfrak{z}^{(k)}$$

Remarque fondamentale Si $R = \sum_{\ell=0}^{n} \beta_\ell X^\ell \in \mathbb{C}[X]$

$$L_R \circ L_Q = L_{QR} : \begin{tikzcd} E_{m+n+p} \arrow[rr] \arrow[dr, "L_Q"'] & & E_p \\ & E_{n+p} \arrow[ur, "L_R"'] & \end{tikzcd}$$

"pv" :

$$L_R \circ L_Q(\mathfrak{z}) \overset{\text{Def}}{=} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \beta_\ell D^\ell\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k D^k\right)(\mathfrak{z})$$

$$\underset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \left(\sum_{\ell=0}^{n} \beta_\ell D^\ell\right) \circ D^k(\mathfrak{z}) \underset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \times \sum_{\ell=0}^{n} \beta_\ell D^\ell \circ D^k$$

$\| \text{Rmq}$

$$L_{QP}(\mathfrak{z}) = \dots = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_k \beta_k X^{\ell+k} \underset{\text{Rmq}}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_k \times \beta_\ell D^\ell \circ D^k$$

m règles de « calcul distributif » pour composition des L_Q $Q \in \mathbb{C}[X]$ et produit des Q ....

<u>Corollaire</u> Si $P = QR \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \ker L_Q$ alors $z \in \ker L_P$

pv $L_P(z) = L_{QR}(z) = L_R \circ L_Q(z) = L_R(L_Q(z)) \underset{\uparrow}{=} L_R(0) \underset{\uparrow}{=} 0$ $\square$

car $z \in \ker L_Q$ car L_R linéaire

Rappel

admis $\begin{cases} \text{(d'Alembert Gauss) Si } P = \alpha_m X^m + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X] \quad \alpha_m \neq 0 \\ \text{il y a } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \text{ t.q. } P = \alpha_m (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_m) \end{cases}$

donc si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ où si $1 \leq i < j \leq q$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

(il n'y a que q éléments deux à deux distincts parmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$)

il y a $m_1, \ldots, m_q$ entiers positifs avec $m_1 + \cdots + m_q = m$ et

$$P = \alpha_m (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_q)^{m_q} = \alpha_m \prod_{j=1}^{q} (X - \lambda_j)^{m_j}$$

Exemples $X^3 - X^2 - X + 1 = (X+1)(X-1)^2$

$q = 2 \quad \lambda_1 = -1 \quad m_1 = 1, \ \lambda_2 = 1, \ m_2 = 2$

$aX + b = a\left(X - \left(-\frac{b}{a}\right)\right) \qquad (a \neq 0)$

$P = aX^2 - 2bX + c \in \mathbb{R}[X]$ //

$b^2 - ac = 0 \qquad P = a\left(X - \frac{b}{a}\right)^2 \quad q = 1, \ \lambda_1 = \frac{b}{a}, \ m_1 = 2$

$b^2 - ac > 0 \qquad P = a\left(X - \underbrace{\left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)}_{\lambda_1}\right)\left(X - \underbrace{\left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)}_{\lambda_2}\right)$

$q = 2 \quad m_1 = 1 = m_2$

$b^2 - ac < 0 \qquad P = a\left(X - \left(b - i\sqrt{ac - b^2}\right)\right)\left(X - \left(b + i\sqrt{ac - b^2}\right)\right)$

Exercice $X^3 + 2X^2 + 2X + 1 =$

$X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1 =$

4 Petits calculs

Notation $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ $\quad t^{[k]} \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} k<0 & t^{[k]} = 0 \\ & t^{[0]} = 1 \\ k \geqslant 1 & t^{[k]} = \dfrac{t^k}{k!} \end{cases}$

Lemme $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_k(t) = t^{[k]}$ est dérivable et

$$D(p_k) = p_k' = p_{k-1}$$

donc p_k a des dérivées de tout ordre $l \in \mathbb{N}$ et $D^l(p_k) = p_{k-l}$

pv Si $k \geqslant 2$ $\quad p_k(t) = \dfrac{t^k}{k!} = \dfrac{t^k}{(k-1)!\,k}$ donc $p_k'(t) = \dfrac{1}{(k-1)!\,k} k t^{k-1} = p_{k-1}(t)$

$p_1(t) = t$ donc $p_1'(t) = 1 = p_0(t)$

Si $k \leqslant 0$ p_k est constante donc $p_k' = 0 = p_{k-1}$ $\square$

pour $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$ soit $\zeta_{\lambda,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\zeta_{\lambda,k}(t) = e^{\lambda t} t^{[k]}$

(pour $k<0$ $\zeta_{\lambda,k} = 0$, $\zeta_{\lambda,0}(t) = e^{\lambda t} = e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt))$)

$k \geqslant 1$ $\quad \zeta_{\lambda,k}(t) = e^{\lambda t}\dfrac{t^k}{k!} = e^{xt}\dfrac{t^k}{k!}(\cos(yt) + i\sin(yt))$

<u>Corollaire 1</u> $\zeta_{\lambda,k}$ a des dérivées de tout ordre et si $\mu \in \mathbb{C}$

$$L_{X-\mu}(\zeta_{\lambda,k}) = (\lambda-\mu)\zeta_{\lambda,k} + \zeta_{\lambda,k-1}$$

pv $L_{X-\mu}(\zeta_{\lambda,k}) = D(e^{\lambda t} p_k(t)) - \mu \zeta_{\lambda,k}$

$$= \lambda e^{\lambda t} p_k(t) + e^{\lambda t} p_{k-1} - \mu \zeta_{\lambda,k} = \lambda \zeta_{\lambda,k} + \zeta_{\lambda,k-1} - \mu \zeta_{\lambda,k} \quad \square$$

<u>Corollaire 2</u> Soit $k, m \in \mathbb{N}$

(1) si $k \geq 1$ $L_{(X-\lambda)^k}(\zeta_{\lambda,k}) = \zeta_{\lambda,0}$

(2) Si $k < m$ $L_{(X-\lambda)^m}(\zeta_{\lambda,k}) = 0$

(donc si $Q = R(X-\lambda)^m$ et $k < m$ $L_Q(\zeta_{\lambda,k}) = L_R(L_{(X-\lambda)^m}(\zeta_{\lambda,k})) = 0$)

pv Cor 1 pour $\mu = \lambda$ $L_{X-\lambda}(\zeta_{\lambda,j}) = (\lambda-\lambda)\zeta_{\lambda,j} + \zeta_{\lambda,j-1} = \zeta_{\lambda,j-1}$

d'où (1) pour $\overset{(=j)}{k=1}$ et (2) pour $m=1$ (et $k=j \leq 0$)

Supposons le résultat vrai pour k et m et pour $\ell = k, m \ (\geq 1)$

$$L_{(X-\lambda)^{\ell+1}}(\zeta_{\lambda,k+1}) = L_{(X-\lambda)^{\ell}} \circ L_{X-\lambda}(\zeta_{\lambda,k+1}) = L_{(X-\lambda)^{\ell}}(L_{X-\lambda}(\zeta_{\lambda,k+1})) = L_{(X-\lambda)^{\ell}}(\zeta_{\lambda,k}) \overset{\text{récurrence}}{=} \begin{cases} \zeta_{\lambda,0} & \text{si } \ell = k \\ 0 & \text{si } \ell = m > k \end{cases}$$

5 Indépendance linéaire des $\zeta_{\lambda,k}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$

$\lambda_1,\dots,\lambda_q\in\mathbb{C}$ $1\leq i<j\leq q$ $\lambda_i\neq\lambda_j$; $1\leq m_1,\dots,m_q\in\mathbb{N}$

$m=m_1+\dots+m_q$ $\quad Q=\prod_{i=1}^{q}(X-\lambda_i)^{m_i}=X^m+\alpha_{m-1}X^{m-1}+\dots+\alpha_0\in\mathbb{C}[X]$

par car 2 les ζ_{λ_i,k_i} $1\leq i\leq q$ $0\leq k_i<m_i$ de $L_Q(\zeta)$

de l'équation différentielle $0=L_Q(\zeta)=\zeta^{(m)}+\alpha_{m-1}\zeta^{(m-1)}+\dots+\alpha_0\zeta=0$

Proposition 1 Les $m=m_1+\dots+m_q$ fonctions ζ_{λ_i,k_i} $1\leq i\leq q$, $0\leq k_i<m_i$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$:

Si pour $1\leq i\leq q$ $0\leq k_i<m_i$ $\alpha_{i,k_i}\in\mathbb{C}$ t.q

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=0}^{m_i-1}\alpha_{i,k_i}\zeta_{\lambda_i,k_i}=0$$

alors pour $1\leq i\leq q$, $0\leq k_i<m_i$ $\alpha_{i,k_i}=0$

pv si $m=1$ on a $0=\alpha_{1,0}\zeta_{\lambda_1,0}$ $(=t\mapsto\alpha_{10}e^{\lambda_1 t})$ donc $\alpha_{10}=0$ $\square$

Si $m > 1$ $\quad Q = (X-\lambda_q)\,Q_q = R_i\,(X-\lambda_i)^{m_i}$

et si $q > 1$ et $1 \leqslant j < q$ $\quad Q_q = (X-\lambda_j)^{m_j} R_j = (X-\lambda_q)^{m_q-1} R_q$

$$0 = L_{Q_q}\left(\sum_{i=1}^{q}\sum_{k_i=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k_i}\,\zeta_{\lambda_i,k_i}\right) = \sum_{i=1}^{q} L_{Q_q}\left(\sum_{k_i=0}^{m_i-1}\alpha_{i,k_i}\,\zeta_{\lambda_i,k_i}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{q-1} L_{(X-\lambda_j)^{m_j}R_j}\left(\sum_{k_j=0}^{m_j-1}\alpha_{j,k_j}\,\zeta_{\lambda_j,k_j}\right)}_{\text{(n'existe pas (= 0) si } q=1} + L_{(X-\lambda_q)^{m_q-1}R_q}\left(\sum_{k_q=0}^{m_q-1}\alpha_{q,k_q}\,\zeta_{\lambda_q,k_q}\right)$$

$$= \overbrace{\sum_{j=1}^{q-1}\alpha_{j,k_j}\,L_{R_j}\Big(\underbrace{L_{(X-\lambda_j)^{m_j}}(\zeta_{\lambda_j,k_j})}_{=0 \text{ car } 2}\Big)} + \underbrace{\sum_{k_q=0}^{m_q-1}\alpha_{q,k_q}\,L_{R_q}\left(L_{(X-\lambda_q)^{m_q-1}}(\zeta_{\lambda_q,k_q})\right)}_{= \text{ car } 2}$$

$$\alpha_{q,m_q-1}\underbrace{\prod_{j=1}^{q-1}(\lambda_j-\lambda_q)^{m_j}}_{=1 \text{ par convention si } q=1}\zeta_{\lambda_q,0} \underset{\text{car 1 + récurrence}}{=} \alpha_{q,m_q-1}\,L_{R_q}\left(\zeta_{\lambda_q,0}\right)$$

d'où, puisque $\zeta_{\lambda_q,0}(0) = 1$ et $\prod_{j=1}^{q-1}(\lambda_j-\lambda_q)^{m_j} \neq 0$, $\alpha_{q,m_q-1} = 0$

donc soit $m_q = 1$ et $\sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k_i=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k_i} \zeta_{\lambda_i,k_i} = 0$ et $\sum_{i=1}^{q-1} m_i = m-1 < m$

soit $m_q > 1$ et $\sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k_i=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k_i} \zeta_{\lambda_i,k_i} + \sum_{k_i=0}^{m_q-2} \alpha_{i,k_i} \zeta_{\lambda_i,k_i} = 0$ et $\sum_{i=1}^{q-1} m_i + m_q - 1 = m-1 < m$

on conclut par récurrence sur m.

$\square$

<u>Remarque</u> Comme $L_{Q_q} = D^{m-1} + \beta_{m-1} D^{m-2} + \cdots + \beta_0 D^0$

ne fait intervenir que les dérivées d'ordre $0 \leq k < m$ de la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{q} \sum_{k_i=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k_i} \zeta_{\lambda_i,k_i}$ $(=0)$

donc en la recopiant en prenant en chaque fois les valeurs en t_0

<u>Proposition 2</u> Si $t_0 \in \mathbb{R}$, les $m = m_1 + \cdots + m_q$ vecteurs

$$\left(\zeta_{\lambda_i,k_i}(0), \zeta'_{\lambda_i,k_i}(0), \ldots, \zeta^{m-1}_{\lambda_i,k_i}(0)\right) \in \mathbb{C}^m \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq q \\ 0 \leq k_i < m_i \end{matrix}$$

sont linéairement indépendants donc forment une base de $\mathbb{C}^m$

$$Q(x) = X^m + \alpha_{m-1}X^{m-1} + \cdots + \alpha_0 = \prod_{i=1}^{q} (X-\lambda_i)^{m_i} \quad 1 \leq i < j \leq q \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

<u>Théorème</u> pour tout $w = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$

il y a des uniques $\alpha_{i,k_i} \in \mathbb{C}$ $1 \leq i \leq q$ $0 \leq k_i < m_i$

tq $\quad \zeta = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k_i=0}^{m_i-1} \alpha_{i,k_i} \zeta_{\lambda_i,k_i}$ est solution de

$$(*_Q, t_0, w) \begin{cases} \zeta^{(m)} + \alpha_{m-1}\zeta^{(m-1)} + \cdots \alpha_1 \zeta'' + \alpha_0 \zeta = 0 \\ \left(\zeta(t_0), \ldots \zeta^{(m-1)}(t_0)\right) = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \end{cases}$$

6 <u>Remarque matricielle</u> (non donné le 30/01/2007 le sera au début du 06/02/2007)

Si $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice identité $n \times n$

et $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$

Le cas 1 dit que l'ev $E_\lambda(n)$ engendré par $\zeta_{\lambda,0}, \ldots, \zeta_{\lambda,n-1}$
est stable par $L_{X-\mu}$ (donc par tout L_P)
La prop que $\zeta_{\lambda,0}, \ldots, \zeta_{\lambda,n-1}$ est une base de $E_\lambda(n)$

V Unicité de la solution d'un pb de Cauchy linéaire (à coeff variable)

Soient $a_0, \dots, a_{m-1} : I \to \mathbb{C}$ des fonctions bornée,

$(\exists K_i > 0 \text{ tq } \forall t \in I \ |a_i(t)| \leqslant K_i)$

Exemples $I = \mathbb{R}$ $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$ (fonctions cste)

$I = [a, b]$ $a_0, \dots, a_{m-1}$ continues (après Mat 121 V)

<u>Théorème</u> Soit $\omega : I \to \mathbb{C}$ m fois dérivable, $t_0 \in I$ t.q

(1) $\forall t \in I \quad \omega^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)\omega^{(m-1)}(t) + \dots + a_1(t)\omega'(t) + a_0(t)\omega(t) = 0$

(2) $\omega(t_0) = 0, \ \omega'(t_0) = 0, \dots, \omega^{(m-1)}(t_0) = 0$

Alors $\omega = 0$ $(\forall t \in I \ \omega(t) = 0)$

<u>Corollaire</u> 1 $Q(X) = X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

et $w = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$

la solution z de $(*_Q, t_0, w)$ donnée en IV 5 est réelle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad z(t) \in \mathbb{R}$$

pv si $\begin{cases} z^{(m)} + a_{m-1} z^{(m-1)} + \cdots + a_0 z = 0 \\ (z(t_0), \ldots, z^{(m-1)}(t_0)) = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \end{cases}$

---

alors, comme $a_0, \ldots, a_{m-1}, w_0, \ldots, w_{m-1} \in \mathbb{R}$ et $\overline{z^{(k)}(t)} = \bar{z}^{(k)}(t)$

en conjuguant $\begin{cases} \bar{z}^{(m)} + a_{m-1} \bar{z}^{(m-1)} + \cdots + a_0 \bar{z} = 0 \\ (\bar{z}(t_0), \ldots, \bar{z}^{(m-1)}(t_0)) = (w_0, \ldots, w_{m-1}) \end{cases}$

donc le thm s'applique à $w = z - \bar{z}$

et $w = 0$ donc $z = \bar{z}$ c.a.d z est réelle pv du thm

Soit $h : I \to \mathbb{R}$ $\quad h(t) = \sum_{i=0}^{m-1} |\omega^{(i)}(t)|^2 = \sum_{i=0}^{m-1} \omega^{(i)}(t)\overline{\omega^{(i)}(t)}$

Lemme 1 h est dérivable et

$$h'(t) = \sum_{i=0}^{m-2} \omega^{(i+1)}(t)\overline{\omega}^{(i)}(t) + \omega^{(i)}(t)\overline{\omega}^{(i+1)}(t)$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \omega^{(m-1)}(t)\overline{a_i(t)\omega^{(i)}(t)} + \overline{\omega^{(m-1)}(t)}\, a_i(t)\omega^{(i)}(t)$$

Lemme 2 Si $a, b \in \mathbb{C}$

$$a\bar{b} + b\bar{a} \leq |a|^2 + |b|^2$$

pv $0 \leq |a-b|^2 = (a-b)\overline{(a-b)}$.

$$= a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b}$$

$$= |a|^2 - (a\bar{b} + b\bar{a}) + |b|^2 \quad \square$$

Corollaire si $K = \max(1+K_0, 2+K_1, \dots, 2+K_{m-2}^2, m+1+K_{m-1}^2)$

on a $h'(t) \leq K h(t)$

donc $(y'' - y = 0)$ $\quad k(t) = h(t) e^{-Kt}$ est décroissante ... $\square$