Exercice Soit $y \in \ker L$, $a, b \in \mathbb{R}$ tq $y(a) = y(b)$ et $T = b - a$. Prouver

soit (1) $y'(a) = y'(b)$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x+T) = y(x)$

soit (2) $y'(a) = -y'(b)$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(a+b-x) = y(x)$

Dans le cas (2) en déduire $y'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, puis

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = y\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos(x)$.

23/01/2007

3 L'équation $y'' - y = 0$ et les fonctions sh et ch.

A Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable t.q $y'' - y = 0$

$h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (y(x))^2 + (y'(x))^2$, $k(x) = h(x) e^{-2x}$

Lemme 1 $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad 2ab \leqslant a^2 + b^2$

pv $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$ $\square$

Lemme 2 k est décroissante

pv • k dérivable et $k'(x) = h'(x) e^{-2x} + h(x) \times (-2 e^{-2x})$

$$= (h'(x) - 2h(x)) e^{-2x}$$

• $h'(x) = 2y(x)y'(x) + 2y'(x)y''(x) = 2(2y(x)y'(x))$

$$\leqslant 2\left((y(x))^2 + (y'(x))^2\right) = 2h(x)$$

donc $k'(x) \leqslant 0$ et (Mat121V) k décroissante.

Proposition il y a équivalence entre

(1) $y=0$

(2) $y(0)=0=y'(0)$

pr (2) ⇒ (1) $\forall x\in\mathbb{R}$ $k(x)=\left(y(x)^2+(y'(x))^2\right)e^{-2x}\geq 0$, k décroissante et $k(0)=0$ donc $\forall x\geq 0$ $k(x)=0$ et $y^2(x)+(y'(x))^2=k(x)e^{2x}=0$ □

Exercice $f(x)=\left(y'(x)\right)^2-\left(y(x)\right)^2$ est constante

reprendre 2 à partir du théorème.

La fonction sinus hyperbolique $sh : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$"

est l'unique fonction tq $\begin{cases} sh''(x)-sh(x)=0 \\ sh(0)=0 \\ sh'(0)=1 \end{cases}$

et la fonction cosinus hyperbolique est $ch=sh'$

l'unique fonction tq $\begin{cases} ch''(x)-ch(x)=0 \\ ch(0)=1 \\ ch'(0)=0 \end{cases}$

Remarque ici l'existence est claire $sh\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Proposition $\forall s,t\in\mathbb{R}$

(1) $ch^2(t)-sh^2(t)=1$

(2) $sh(s+t)=sh(s)\,ch(t)+ch(s)\,sh(t)$

(3) $ch(s+t)=ch(s)\,ch(t)+sh(s)\,sh(t)$

III Equations différentielles linéaires

Hypothèses de I avec $Y = \mathbb{R}$, $f(x,y) = a(x)y$ où $a : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive A / $A =$

Exemples a) (I 1.) $I = \mathbb{R}$; $f(x,y) = -xy$; $A(x) = -\frac{x^2}{2}$

b) (après intégration de Mat 122V) a continue et $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$

Lemme Si $z : I \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in I$ $z'(x) \leq a(x) z(x)$ [resp. $\forall x \in I$ $z'(x) \geq a(x) z(x)$]

Alors $k : I \to \mathbb{R}$, $k(x) = z(x) e^{-A(x)}$ est décroissante (resp. croissante)

En particulier $\forall x \in I$ $x \geq x_0 \Rightarrow z(x) \leq z(x_0) e^{A(x) - A(x_0)}$

(resp. $z(x) \geq z(x_0) e^{A(x) - A(x_0)}$

$x \geq x_0 \Rightarrow z(x) \geq z(x_0) e^{A(x) - A(x_0)}$

(resp. $z(x) \leq z(x_0) e^{A(x) - A(x_0)}$

pr. Comme $z'(x) \geq a(x) z(x) \Leftrightarrow (-z)'(x) \leq a(x)(-z(x))$

et $z(x) \geq z(x_0) e^{A(x) - A(x_0)} \Leftrightarrow -z(x) \leq (-z(x_0)) e^{A(x) - A(x_0)}$

on peut supposer (o.p.s.) que l'on est dans le cas $\forall x \in I$ $z'(x) \leq a(x) \times z(x)$

- k est dérivable et $k'(x) = z'(x) \times e^{-A(x)} + z(x) \times (-A'(x)) \times e^{-A(x)}$

$$= \left(z'(x) - a(x) \times z(x)\right) e^{-A(x)} \leq 0 \text{ (car } e^{-A(x)} > 0$$

donc k est décroissante. □

- $x \geq x_0 \Rightarrow z(x) \times e^{-A(x)} = k(x) \leq k(x_0) = z(x_0) e^{-A(x_0)}$.

$$\Rightarrow z(x) = z(x) e^{0} = z(x) e^{-A(x)} e^{A(x)} \underset{(e^{A(x)} > 0)}{\leq} z(x_0) e^{-A(x_0)} \times e^{A(x)} = z(x_0) e^{A(x) - A(x_0)}$$

Exercice cas $x \leq x_0$ □

Exemple $0<n\in\mathbb{N}$ $x\geq -n$ $\mathfrak{z}(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; $\mathfrak{z}'(x)=n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\mathfrak{z}(x)$

$\forall x\in[0,X]$ $\frac{n}{n+X}\mathfrak{z}(x)=\frac{1}{1+\frac{X}{n}}\mathfrak{z}(x)\leq\mathfrak{z}'(x)\leq\mathfrak{z}(x)$

donc $e^{\frac{n}{n+X}x}\leq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leq e^x$

Exercice a) $e^x-e^{\frac{n}{n+X}x}=e^x\left[1-e^{-\frac{X}{n+X}x}\right]\leq e^X\left[1-e^{-\frac{X^2}{n+X}}\right]\to 0$ qd $n\to\infty$

b) encadrement de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour $n>X$ et $x\in[-X,0]$

c)* (en L2 ou si il y avait des suites en Mat 121V)

Sans connaître l'existence de e^x prouver que $x\mapsto\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge, que la limite $f(x)$ est derivable et $\begin{cases}f'(x)=f(x)\\ f(0)=1\end{cases}$

Théorème Le pb. de Cauchy $\begin{cases}y'(x)=a(x)y(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ a une solution unique : $y_{x_0}(x)=y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$

pr • y_{x_0} est sol : $\frac{d}{dx}y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}=y(x_0)\times\frac{d}{dx}\left(A(x)-A(x_0)\right)e^{A(x)-A(x_0)}$

et $y_{x_0}(x_0)=y(x_0)e^{A(x_0)-A(x_0)}=y(x_0)$ $\quad=y(x_0)A'(x)e^{A(x)-A(x_0)}=a(x)y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$

• Si y solution : $y'(x)\leq a(x)y(x)$ et $y'(x)\geq a(x)y(x)$

le lemme donne pour $x\geq x_0$ $y(x)\leq y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$ et $y(x)\geq y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$

et pour $x\leq x_0$ $y(x)\geq y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$ et $y(x)\leq y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$

. donc $\forall x\in I$ $y(x)=y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)}$ $\square$

Exemple Dans I 1. on a esquissé les graphes de $y(x)=y(0)e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\square$

IV Équations différentielles linéaires d'ordre $n \geq 2$ à coefficients constant

Existence de n solutions linéairement indépendant

$\omega, \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad x'' + 2c x' + 4\omega^2 x = 0$

est, si $\lambda \geq 0$, l'équation de mouvement des petites oscilations d'un pendule (où c exprime le frottement)

Si $\lambda = 0$ les solutions sont

$$x = \underbrace{x_0}_{\text{position}} \cos 2\omega t + \underbrace{x_1}_{\text{vitesse}} \sin 2\omega t = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}\,\sin(2\omega t + \varphi)$$

(position, vitesse : initiale)

si $\lambda \neq 0$?

Données ① $2 \leq n \in \mathbb{N}$ $\quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $\quad P(X) = a_n X^n + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$

polynôme à coefficients réels de degré $\leq n$ ($= n$ si $a_n \neq 0$)

Exemple $n = 2$ $\quad P(X) = X^2 + 2cX + \omega^2$

② $t_0 \in \mathbb{R}$ et $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

<u>définition</u> une *solution* du *problème de Cauchy linéaire associé à P* de donnée initiale u en t_0 est $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable tq

$$(*_P, t_0, u) \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}(t) = 0 \\ (x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)) = u \end{cases}$$

($*_P$) équation différentielle associée à P

condition initiale

<u>Remarque</u> $t \mapsto e^{t}$ est sol^{n} du pb. de Cauchy associé à $X-1$ avec donnée initiale 1 en 0
——————————— X^2-1 ——— $(1,1)$ —

$t \mapsto e^{-t}$ ——————————— $X+1$ ——————— 1 —
——————————— X^2-1 ——————— $(1,-1)$ —

$sh(t) = \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})$ ——————————— $(0,1)$ —
$$(0,1) = \frac{1}{2}\big((1,1)-(1,-1)\big)$$

et $X^2-1 = (X-1)(X+1)$

<u>Exercice</u> $P(X) = X^2 + 2(1+\omega)X + 4\omega^2 = (X+2)(X+2\omega)$

$t \mapsto e^{-2t}$ et $t \mapsto e^{-2\omega t}$ sont sol^{n} lin^{t} indépendantes de $x'' + (1+\omega)x' + x = 0$

mais si $c^2 < \omega^2$ on ne peut « deviner ainsi » des sol^{n}

1. Fonctions à valeurs complexes sur un intervalle I.

<u>définition</u> une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ $f(t) = x(t) + i\,y(t)$ $[x, y : I \to \mathbb{R}]$

est <u>continue</u> [resp. n fois <u>dérivable</u>] si ses parties réelles et imaginaires

x et y sont continues [resp. n fois dérivables. En ce cas pour

$1 \leq k \leq n$ la dérivée $k^{ième}$ de f est $f^{(k)} : I \to \mathbb{C}$, $f^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) + i\,y^{(k)}(t)$

par convention $f^{(0)} = f$]

<u>Exemple</u>. $z = a+ib$ $f : I \to \mathbb{C}$ $f(t) = z$ $f' = 0$

Si $\lambda = a+ib$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $f(t) = e^{\lambda t} \stackrel{\text{def}}{=} e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$

est dérivable et $f'(t) = \lambda f(t)$

$$\text{pv } f'(t) = (e^{at}\cos bt)' + i(e^{at}\sin bt)'$$
$$= a e^{at}\cos bt - b e^{at}\sin bt + i(a e^{at}\sin bt + b e^{at}\cos bt)$$
$$= (a+ib)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) = \lambda f(t) \quad \square$$

et vérifie $\overline{e^{\lambda t}} = e^{\bar{\lambda} t}$

pv $\overline{e^{\lambda t}} = \overline{e^{at}(\cos bt + i\sin bt)} = e^{at}(\cos bt - i\sin bt)$

$= e^{at}(\cos(-bt) + i\sin(-bt)) = e^{(a-ib)t} = e^{\bar{\lambda} t}$

Exercice ① Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ $\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$ est dérivable et $\bar{f}'(t) = \overline{f'(t)}$

② Si $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ $Q(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ alors Q est dérivable $Q'(t) = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k t^{k}$

$\bar{Q}(t) = \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_k t^k$

③ Si $f = x + iy$, $g = u + iv : I \to \mathbb{C}$ sont dérivables alors $f+g : t \mapsto f(t) + g(t)$ et $f \cdot g : t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ sont dérivables et $(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t)$; $(f \cdot g)'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) g'(t)$.

$n, m \in \mathbb{N}$ $E_n = \{ z : \mathbb{R} \to \mathbb{C} ;\ n \text{ fois dérivables} \}$ si $n > 0$, $E_0 \neq F = \{ z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \}$

Linéaires
$$\begin{cases} L_Q : E_{m+n} \to E_m & L_Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{(k)} \\ C_{t_0} : E_n \to \mathbb{C}^n & C_{t_0}(z) = (z(0), \dots, z^{(n-1)}(0)) \end{cases}$$

$t_0 \in \mathbb{R}$ $w = (w_0, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$

<u>définition</u> une solution du problème de Cauchy (complexe) linéaire associé à Q et de donnée initiale w en t_0 est $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n fois différentiable t.q.

$$(*_Q, t_0, w) \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{(k)}(t) = 0 \quad (*_Q) \\ (z(0), \dots, z^{(n-1)}(0)) = w \end{cases}$$

Remarque ① Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ il y a équivalence entre

(1) z est solution de $(*_Q, t_0, w)$

(2) $z \in \ker L_Q$ et $C_{t_0}(z) = w$.

Lemme $L_Q(e^{\lambda t}) = Q(\lambda)e^{\lambda t}$

pv $L_Q(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{n} d_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{n} d_k \lambda^k e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^{n} d_k \lambda^k\right) e^{\lambda t}$

Corollaire si $Q(x) = X^2 + 2bX + c \in \mathbb{R}[X]$

et $Q(x) = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ avec $\lambda \neq \bar{\lambda}$

alors $e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}$ et $\frac{1}{i}(e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t})$

sont deux solutions réelles linéairement indépendants

de $x'' + 2bx' + cx = 0$

pv ① $L_Q(e^{\lambda t}) = Q(\lambda)e^{\lambda t} = 0 = Q(\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda} t} = L_Q(e^{\bar{\lambda} t})$

donc $e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}$ et $\frac{1}{i}(e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t})$ sont solutions.

comme $e^{\bar{\lambda} t} = \overline{e^{\lambda t}}$ elles sont réelles

② elles sont linéairement indépendantes car

$e^{\lambda t}$ et $e^{\bar{\lambda} t}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

$0 = u e^{\lambda t} + v e^{\bar{\lambda} t}$ donc $0 = L_{X-\lambda}(u e^{\lambda t} + v e^{\bar{\lambda} t})$

$= u L_{X-\lambda}(u e^{\lambda t}) + v L_{X-\lambda}(v e^{\bar{\lambda} t}) = u(\lambda-\lambda)e^{\lambda t} + v(\bar{\lambda}-\lambda)e^{\bar{\lambda} t}$

$= v(\bar{\lambda}-\lambda)e^{\bar{\lambda} t}$ donc $v = 0$ de même $0 = L_{X-\bar{\lambda}}(u e^{\lambda t} + v e^{\bar{\lambda} t})$

$= u(\lambda-\bar{\lambda})e^{\lambda t}$ donc $u = 0$ $\square$