Equations différentielles

I Introduction

Données deux intervalles réels I et Y ; $x_0 \in I$ et $y_0 \in Y$

une application $f : I \times Y \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$

<u>définition</u> • une <u>solution</u> de <u>l'équation différentielle</u> $\boxed{y' = f(x, y)}$ $(*)$

est une application dérivable $y : I \to Y$ telle que (t.q.)

$$\forall x \in I \text{ on a } y'(x) = f(x, y(x))$$

• Si $y(x_0) = y_0$ on dit que y est solution du

<u>problème</u> de <u>Cauchy</u> $(**)$ $\begin{cases} y' = f(x, y) & (*) \\ y(x_0) = y_0 & \text{condition initiale} \end{cases}$

<u>Remarque</u>. Si f ne dépend pas de y

$[Y = \mathbb{R}$ et il y a $g : I \to \mathbb{R}$ t.q. $\forall (x, y) \in I \times Y, f(x, y) = g(x)]$

une sol$^{\underline{n}}$ de $(*)$ est $y : I \to \mathbb{R}$ t.q. $y' = g$:

une primitive de g.

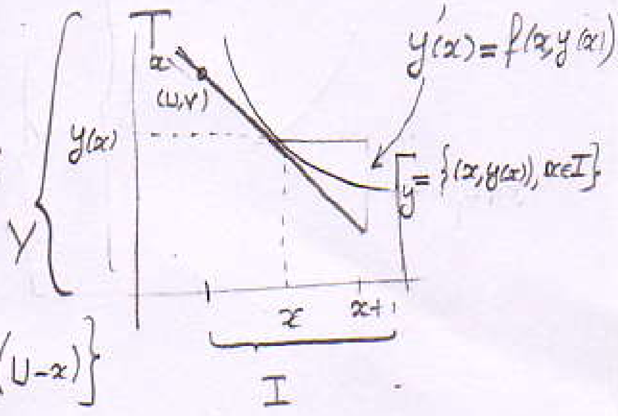
1 Interprétation graphique, « méthode » des isoclines.

Si $y : I \to Y$ est sol^{n} de $(*)$ et $x \in I$

la tangente T_x en $(x, y(x))$ au graphe Γ_y de y

est de pente $f(x, y(x))$,

c'est la droite $\{(U,V) \in \mathbb{R}^2 \mid V - y(x) = f(x, y(x))(U - x)\}$



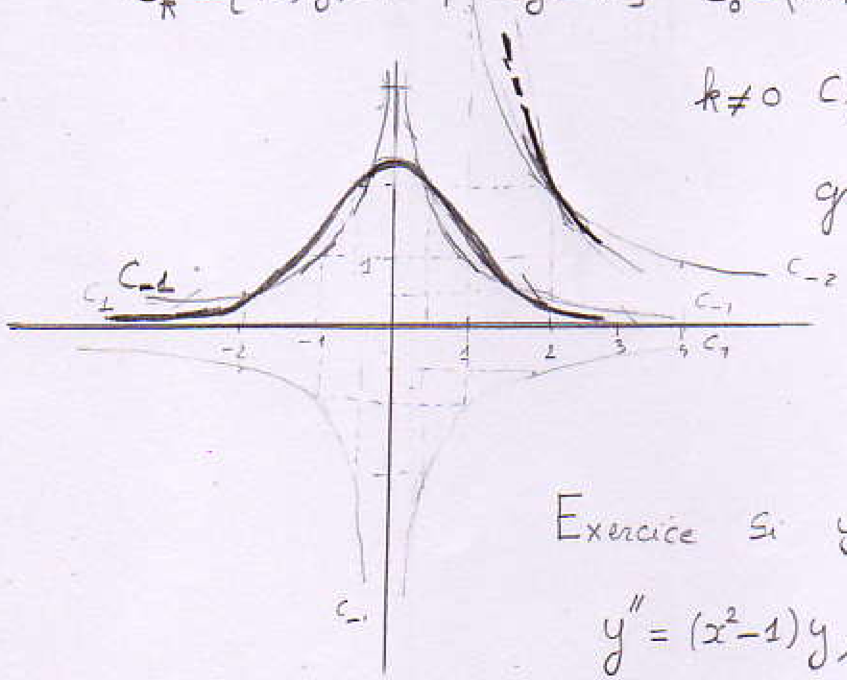
pour représenter les sol^{n} de $(*)$ on trace un "canevas"

quelques courbes de niveau $C_k = \{(x,y) \in I \times Y \mid f(x,y) = k\}$ de f

et dessine des courbes coupant ces C_k avec pente k.

<u>Exemple</u> $(*)$ $y' + xy = 0$ $(\Leftrightarrow y' = -xy)$ $I = \mathbb{R} = Y$

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -xy = k\}$ $C_0 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$: $y = 0$ est sol^{n} de $(*)$



$k \neq 0$ C_k est une hyperbole ; deux branches

graphes de : $\left.\begin{matrix}]0, +\infty[\\ ]-\infty, 0[\end{matrix}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\frac{k}{x}$

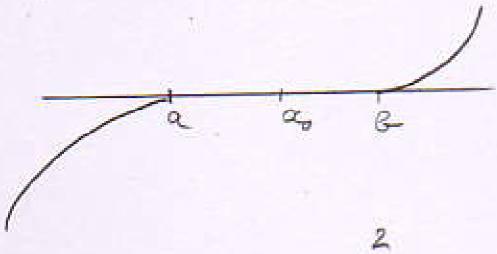
Exercice Si $y' + xy = 0$ alors

$$y'' = (x^2 - 1)y, \quad \left[y' - \left(-\frac{k}{x}\right)'\right]_{xy=-k} = k\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

changent de signe quand $x^2 = 1$ donc

coupe chaque branche de C_k en 0, 1 (si $x^2 = 1$) ou 2 points

2 ime "équation pathologique": Soit $a, x_0, b \in \mathbb{R}$ $a \leq x_0 \leq b$



$x \leq a$ $y(x) = \left(\frac{x-a}{3}\right)^3$

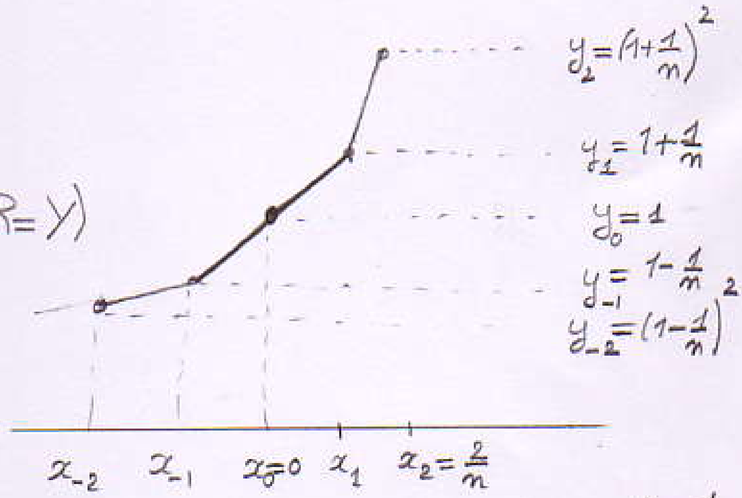
$a \leq x \leq b$ $y(x) = 0$

$x \geq b$ $y(x) = \left(\frac{x-b}{3}\right)^3$

comme $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-c}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3} \times 3(x-c)^2 = \left(\frac{x-c}{3}\right)^2 = \left(\left(\left(\frac{x-c}{3}\right)^3\right)^{1/3}\right)^2 \overset{def}{=} \left(\left(\frac{x-c}{3}\right)^3\right)^{2/3}$

ces fonctions y $(= y_{a,b})$ donnent une infinité de sol^{no} au pb. de Cauchy.

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$



3 La méthode d'Euler (cas $I = \mathbb{R} = Y$)

on choisit un pas $h > 0$

pour $m \in \mathbb{Z}$ $x_m = x_0 + mh$

$y_h(x_0) = y_0$

Ex $f(x,y) = y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$; $h = \frac{1}{n}$

Soit $k, \ell \in \mathbb{N}$ on suppose y_h définie

sur $[x_{-\ell}, x_k]$, $y_{-\ell} = y_h(x_{-\ell})$, $y_k = y_h(x_k)$

si $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $y_h(x) = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k)$

$x \in [x_{-(\ell+1)}, x_{-\ell}]$ $y_h(x) = y_{-\ell} + f(x_{-\ell}, y_{-\ell})(x - x_{-\ell}) = y_{-\ell} - f(x_{-\ell}, y_{-\ell})(x_{-\ell} - x)$

Remarques a] Si $Y \subsetneq \mathbb{R}$ la construction peut s'arrêter avant que x_k sorte de I

exemple $I = \mathbb{R}$, $Y =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $f(x,y) = \operatorname{tg} y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

comme pour $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ on a $y \leq \operatorname{tg} y$

tant que y_k est défini ($k \in \mathbb{N}$) on a

$$y_k = y_h(x_k) \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euler pour } \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}}}{(1+h)^k} \geq kh$$

il faut donc $k \leq \frac{\pi}{2h}$ (au moins!) pour pouvoir définir y_{k+1}.

b] même si $Y = \mathbb{R}$ ces approximations d'Euler peuvent diverger

Exercice $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 1 \end{cases}$ $(I = \mathbb{R} = Y)$ $n \in \mathbb{N}$ $n > \frac{y_0}{y_0 - 1}$ $h = \frac{1}{n}$

prouver que pour $k \in \mathbb{N}$ $0 \leq k \leq n - \frac{y_0}{y_0-1}$ on a $y_h(\frac{k}{n}) \geq \frac{y_0 n}{n-k}$

En déduire $y_h(1) \geq y_0(y_0-1)n \to \infty$ qd $n \to \infty$

Information (voir L3) Si f est continue $x_0 \in I$, $y_0 \in Y$ il y a

- un sous intervalle ouvert $J \subset I$ avec $x_0 \in J$
- une suite d'entiers n_k avec $n_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$

tels que les $y_{\frac{1}{n_k}} : J \to \mathbb{R}$ sont à valeurs dans Y et convergent vers une solution sur J, $y : J \to Y$ de $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

II Les fonctions élémentaires

Exercice Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable ; $a, b \in \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z(x) = y(ax+b)$

alors z est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$ $z'(t) \left(= \frac{d}{dx} y(ax+b)\Big|_{x=t}\right) = a\, y'(at+b)$

En particulier $\frac{d}{dx} y(-x)\Big|_{x=t} = -y'(-t)$ et $\frac{d}{dx} y(x+b)\Big|_{x=t} = y'(t+b)$

1 Rappels l'équation différentielle $y' = y$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lemme Soit $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de $y' = y$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = y_1(x) y_2(-x)$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = h(0)$ $(= y_1(0) \times y_2(0))$

pv : h est dérivable et $h'(x) = y_1'(x) \times y_2(-x) + y_1(x) \times \overset{\text{ex}}{(-y_2'(-x))}$

$$= y_1(x) \times y_2(x) + y_1(x) \times (-y_2(-x)) = 0$$

donc (prouvé en Mat 121V) h est constante. $\square$

Théorème 1) Si $y' = y$ a une solution non nulle ($\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $y(x_0) \neq 0$)

alors $z(x) = \frac{1}{y(x_0)} y(x + x_0)$ est sol^n de $y' = y$, $z(0) = 1$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$ $z(x) > 0$, $z(-x) = \frac{1}{z(x)}$

2) Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $y' = y$ avec $y_1(0) = y_2(0)$

alors $y_1 = y_2$ (unicité de la sol^n du pb de Cauchy pour $y' = y$)

. pv 1) $z(0) = \frac{1}{y(x_0)} y(0 + x_0) = 1$; $z'(x) \underset{1\,\text{Ex}}{=} \frac{1}{y(x_0)} y'(x + x_0) \underset{1\; y'=y}{=} \frac{1}{y(x_0)} y(x + x_0) = z(x)$

donc (Lemme avec $y_1 = z = y_2$) $\forall x \in \mathbb{R}$ $z(x)z(-x) = z(0)z(0) = 1$

En particulier $z(x) \neq 0$ et $z(-x) = \frac{1}{z(x)}$

z derivable donc continue. Partant non nulle $\underbrace{\text{elle est de signe cst}}_{\text{thm des valeurs intermédiaires (TVI)}}$ □

2) Si toute solution de $y' = y$ est nulle alors $y_1 = 0 = y_2$

Simon soit z donnée par 1) alors pour $i = 1, 2$ (Lemme pour y_i et z)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad y_i(x) \times z(-x) = y_i(0) \times z(0) = y_i(0)$ donc par 1)

$$y_i(x) = y_i(x) \times \frac{1}{z(x)} \times z(x) = y_i(x) \times z(-x) \times z(x) = y_i(0) \times z(x).$$

et si $y_1(0) = y_2(0)$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $y_1(x) = y_2(x)$. ■

$\boxed{\text{On admet}}$ que $y' = y$ a une solution non nulle et note $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \exp(t) = e^t$ celle avec $y(0) = 1$
(existe et est unique par le thm)

__Corollaire__ $\forall s, t \in \mathbb{R}$ on a $e^{s+t} = e^s \times e^t$

pr $t \mapsto \exp(t+s) = \exp(s+t)$ et $t \mapsto \exp(s)\exp(t)$

sont deux solutions de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = \exp(s) \end{cases}$ ■

2 L'équation $y''+y=0$ et les fonctions trigonométriques

A Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable t.q. $y''+y=0$

Remarque $z = y'$ est deux fois dérivable et $z''+z=0$

pv $z' = y'' = -y$ donc z est dérivable et $z'' = -y' = -z$ c.a.d $z''+z=0$. □

Exercice y a des dérivées de tout ordre $n \in \mathbb{N}$ ($y^{(0)} = y$, $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$) et $(y^{(n)})'' + y^{(n)} = 0$

Lemme La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (y(x))^2 + (y'(x))^2$ est constante.

pv h est dérivable et $h'(x) = 2\,y(x)\,y'(x) + 2\,y'(x) \times y''(x) = 2\,y'(x)\,(y(x) + y''(x)) = 0$ □

Proposition Il y a équivalence entre

(1) $y = 0$

(2) $y' = 0$

(3) y et y' sont linéairement dépendants

$(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ (\lambda,\mu) \neq (0,0)$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}\ \lambda y(x) + \mu y'(x) = 0)$

(4) $(y(0), y'(0))$ et $(y'(0), \underbrace{(y')'(0)}_{= y''(0)})$ sont lin. indépendants de $\mathbb{R}^2$

(5) $y(0) = 0 = y'(0)$

pv Exercice expliquer les "parties évidentes" (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4)

(4) ⇒ (5) $(0,0) = \lambda(y(0), y'(0)) + \mu(y'(0), y''(0))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda y(0) + \mu y'(0) & (\times \lambda, \mu) \\ 0 = \lambda y'(0) + \mu y''(0) & (\times -\mu, \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda^2 y(0) - \mu^2 y''(0) = (\lambda^2+\mu^2)\,y(0) \\ 0 = \lambda\mu(\cancel{y(0)} + y''(0)) + (\lambda^2+\mu^2)\,y'(0) \end{cases} \square$$

□

(5) ⇒ (1) par le Lemme $\forall x \in \mathbb{R}\quad y(x)^2 + (y'(x))^2 = (y(0))^2 + (y'(0))^2 = 0$ □

1. __Théorème__ y est uniquement déterminé par $(y(0), y'(0))$

pv Si pour $i = 1, 2$ $y_i'' + y_i = 0$ et $(y_1(0), y_1'(0)) = (y_2(0), y_2'(0))$
alors $y = y_1 - y_2$ vérifie $y'' + y = 0$ et (5) de la prop.
donc (1) $y = 0$ et $y_1 = y_2$ $\square$

Autre formulation de la preuve

$$L : E = \{ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{deux fois dérivables} \} \to F = \{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$
$$z \mapsto z'' + z$$

$C : E \to \mathbb{R}^2$ $z \mapsto (z(0), z'(0))$ sont linéaires

$\{ y \mid y'' + y = 0 \} = \ker L$ est un sous-espace vectoriel de E

(5) $\Rightarrow$ (1) dans la prop. assure $\ker \left(C_{|\ker L} : \ker L \to \mathbb{R}^2 \;\; y \mapsto (y(0), y'(0)) \right) = \{0\}$
donc (Mat111V) $C_{|\ker L}$ est injective.

__Corollaire__ Si $\ker L \neq \{0\}$ (on n'a pas raisonné que sur la fonction 0 !)
il y a un unique $z \in \ker L$ tq $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$
pour tout $y \in \ker L$ on a $y = y'(0) z + y(0) z'$

pv Si $0 \neq y \in \ker L$ (4) signifie que
que $(y(0), y'(0)), (y'(0), (y')'(0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$
il y a donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $(0, 1) = \lambda (y(0), y'(0)) + \mu (y'(0), (y')'(0))$

$z = \lambda y + \mu y' \in \ker L$ et $(z(0), z'(0)) = (0, 1)$

l'unicité de z et $y = y'(0) z + y(0) z'$ suit du théorème

puisque $y(0) = y'(0) \times 0 + y(0) \times 1 = y'(0) \times z(0) + y(0) \times z'(0)$

$$y'(0) = y'(0) \times 1 + y(0) \times 0 = y'(0) \times z'(0) + y(0) \times (-z(0))$$
$$= y'(0) \times z'(0) + y(0) \times (z')''(0) \square$$

B On suppose $\ker L \neq \{0\}$, note $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

l'unique fonction (corollaire) tq $\begin{cases} \sin + \sin'' = 0 \\ \sin(0) = 0 \\ \sin'(0) = 1 \end{cases}$

et $\cos = \sin'$ (c'est l'unique fonction tq $\begin{cases} \cos + \cos'' = 0 \\ \cos(0) = 1 \\ \cos'(0) = -0 = 0 \end{cases}$)

Proposition $\forall s, t \in \mathbb{R}$ on a

(1) $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

(2) $\sin(s+t) = \sin(s) \cos(t) + \cos(s) \sin(t)$

(3) $\cos(s+t) = \cos(s) \cos(t) - \sin(s) \sin(t)$

pv (1) est le Lemme de A puisque

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = (\sin(t))^2 + (\sin'(t))^2 = (\sin(0))^2 + (\sin'(0))^2 = 0 + 1 = 1$

(2) et (3) comme fonction de t chaque membre vérifie $y + y'' = 0$

et pour (2) $\sin(s+0) = \sin(s) = \sin(s) \times 1 + \cos(0) \times 0$

$$= \sin(s) \times \cos(0) + \cos(s) \times \sin(0).$$

(3) Exercice.

Exercice Soit $y \in \ker L$, $a, b \in \mathbb{R}$ tq $y(a) = y(b)$ et $T = b - a$. Prouver

soit (1) $y'(a) = y'(b)$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x+T) = y(x)$

soit (2) $y'(a) = -y'(b)$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(a+b-x) = y(x)$

Dans le cas (2) en déduire $y'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, puis

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = y\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos(x)$.