24/04/2007

Compléments d'intégration

<u>Rappels 1</u> $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornées intégrables sur $[a,b]$

a) (Linéarité) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda f + \mu g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable sur $[a,b]$

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

b) (monotonicité) $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a)$$

c) Chasles $\forall c \in [a,b]$ $f_{|[a,c]}$, $f_{|[c,d]}$ intégrables

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx$$

Convention $\displaystyle\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

$\forall x, y, z \in [a,b]$ $\displaystyle\int_x^y f(t)\, dt = \int_x^z f(t)\, dt + \int_z^y f(t)\, dt$

1 Intégrale comme fonction de la borne supérieure (resp. inférieure)

$$F, G : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

d'après c) $\forall x \in [a, b]$ $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)\,dt = \text{cste}$

Proposition Les fonctions F et G sont continues

plus précisément si $\forall x \in [a, b]$ $|f(x)| \leq K$ $(K = \max(|m|, |M|))$

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |F(y) - F(x)|, |G(y) - G(x)| \leq K|y - x|$$

pv ① comme $F + G = \text{cste}$ $F(y) - F(x) = G(x) - G(y)$

il suffit de montrer pour G $\square$

② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad K\delta \leq \varepsilon \qquad \left(\delta = \frac{\varepsilon}{1+K}\right)$

$\forall x, y \in [a, b] \quad |y - x| \leq \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq K|y - x| \leq K\delta \leq \varepsilon$

donc F (uniformément) continue sur $[a, b]$ $\square$

③ $$|F(y) - F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|$$

on peut supposer $x \leq y$

$$-K|y-x| = -K(y-x) \leq m(y-x) \leq \int_x^y f(t)\,dt \leq M(y-x) \leq K(y-x) = K|y-x|$$

d'où $$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq K|y - x|$$

<u>Corollaire 1</u> Si f est continue en $x \in [a, b]$ alors F et G sont dérivables en x et

$$F'(x) = f(x) \quad ; \quad G'(x) = -f(x)$$

pv Comme $F + G =$ cste il suffit de prouver F dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

$$F(y) - F(x) - f(x)(y-x) = \int_x^y f(t) - f(x)\, dt$$

Comme f continue en x $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tq

$$|t - x| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Si $|y - x| \leq \delta$ et t entre x et y $\quad |t - x| \leq \delta$

donc $\sup\limits_{t \text{ entre } x \text{ et } y} |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$

et si $|y - x| \leq \delta$ on a

$$\left| F(y) - F(x) - f(x)(y-x) \right| \leq \varepsilon |y - x|$$

donc F dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ $\square$

Corollaire 2 (1° théorème de la moyenne)

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec f continue, g intégrable $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geq 0$ alors il y a $\xi \in [a,b]$ tq

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

pr comme f continue sur $[a,b]$ il y a $c, d \in [a,b]$ tq

$$f(c) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(d) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Comme $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

$$f(c)\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(d)\,g(x)$$

d'où

$$f(c)\int_a^b g(x)\,dx \underset{\text{linéarité}}{=} \int_a^b f(c)g(x)\,dx \underset{\text{monotonie}}{\leq} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b f(d)g(x)\,dx = f(d)\int_a^b g(x)\,dx$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ alors $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ et

$$\forall \xi \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

Sinon, comme f continue, il y a ξ entre c et d tq $f(\xi) = \dfrac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

et $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$ $\square$

Rappels : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ subdivision de $[a, b]$

$i = 1, \dots, n \quad e_i = a_i - a_{i-1} \quad \omega_i = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) - \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$

Il y a équivalence entre

① f intégrable sur $[a, b]$ et $I = \int_a^b f(x)\, dx$

② (condition de Riemann) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq

$\forall a = a_0 < a_1 \dots < a_N = b \quad \max_{1 \leq i \leq N} e_i \leq \delta$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i \omega_i \leq \varepsilon$

③ (Sommes de Riemann) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq

$\forall a = a_0 < \dots < a_N = b \quad \max_{1 \leq i \leq N} e_i \leq \delta$

$\forall \xi_i \in [a_{i-1}, a_i] \qquad \left| I - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) e_i \right| \leq \varepsilon$

Rmq ② $\Rightarrow$ f, g intégrable $\Rightarrow$ $f \cdot g$ intégrable

(utilisée dans car 2)

$\Rightarrow$ (f continue $\Rightarrow$ f intégrable)

$\Downarrow \qquad \Uparrow$

f uniformément continue

mais on avait prouvé f continue $\Rightarrow$ f intégrable sans utiliser la continuité uniforme de f.

2 Intégration par partie

Théorème Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables

$$F, G : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

alors
$$[FG]_a^b \overset{def}{=} F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

Remarque Si f et g continue $F' = f$, $G' = g$

c'est la règle de Leibnitz $(FG)' = F'G + FG'$

pv $a = a_0 < a_1 \dots < a_N = b$

(1)
$$\sum_{i=1}^{N} \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big)G(a_i) + F(a_{i-1})\big(G(a_i) - G(a_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} F(a_i)G(a_i) - \sum_{i=1}^{N} \cancel{F(a_{i-1})G(a_i)} + \sum_{i=1}^{N} \cancel{F(a_{i-1})G(a_i)} - \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1})G(a_{i-1})$$

$$= F(b)G(b) + \sum_{k=1}^{N-1} \cancel{F(a_k)G(a_k)} - \sum_{l=1}^{N-1} \cancel{F(a_l)G(a_l)} - F(a)G(a)$$

$$= F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

(2)
$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx\, G(a_i) + F(a_{i-1}) \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(a_i)G(a_i) + \sum_{i=1}^{N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \big(f(x) - f(a_i)\big)\,dx\, G(a_i) + \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1}) \int_{a_{i-1}}^{a_i} \big(g(x) - g(a_{i-1})\big)\,dx + \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1})g(a_{i-1})$$

Soit M tq $\forall x \in [a,b]$ $|F(x)|\,|G(x)| \leq M$

$\forall \varepsilon\ \exists \delta$ tq $\max e_i \leq \delta$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\, e_i \,,\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i(g)\, e_i < \varepsilon/_{4M}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(a_i) G(a_i) - \int_a^b f(x) G(x) \right| \leq \varepsilon/_2$$

$$\left| \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1}) g(a_{i-1}) - \int_a^b F(x) g(x) \right| \leq \varepsilon/_2$$

d'où $\left| F(b)G(b) - F(a)g(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx - \int_c^b F(x)g(x)\,dx \right|$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{N} f(a_i) G(a_i) - \int_a^b f(x) G(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) - f(a_i)\,dx\, G(a_i) \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1}) \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(x) - g(a_{i-1})\,dx + \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1}) g(a_{i-1}) - \int_c^b F(x)g(x)\,dx \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{N} f(a_i) G(a_i) - \int_a^b f(x) G(x)\,dx \right| + \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\, e_i\, |G(a_i)| + \sum_{i=1}^{N} |F(a_{i-1})|\, \omega_i(g)\, e_i$$
$$+ \left| \sum_{i=1}^{N} F(a_{i-1}) g(a_{i-1}) - \int_a^b F(x) g(x)\,dx \right|$$

$$\leq \varepsilon/_2 + \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\, e_i M + \sum_{i=1}^{N} M \omega_i(g)\, e_i + \varepsilon/_2 \leq \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon$$

$\square$

Exemple a) $\int_0^X t e^t dt = \left[t e^t \right]_0^X - \int_0^X e^t dt$

$= X e^X - (e^X - 1) = (X-1) e^X + 1$ $\square$

b) $0 < X < Y$ $\int_X^Y \frac{\cos x}{x} dx = \left[\frac{\sin x}{x} \right]_X^Y + \int_X^Y \frac{\sin x}{x^2} dx$

$= \frac{\sin Y}{Y} - \frac{\sin X}{X} + \int_X^Y \frac{\sin x}{x^2} dx$

donc $\left| \int_X^Y \frac{\cos x}{x} dx \right| \leqslant \frac{1}{Y} + \frac{1}{X} + \int_X^Y \frac{1}{x^2} dx$

$= \frac{1}{Y} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} = \frac{2}{X}$ $\square$

3 Formule de Taylor avec reste intégral.

def Soit $k\in\mathbb{N}$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est de classe C^k si f a des dérivées jusqu'à l'ordre k et $f^{(k)}:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue

Lemme Soit $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ $f\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^p alors

$$(-1)^{p-1} g^{(p)} f + g f^{(p)} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} g^{(p-1-k)} f^{(k)}\right)'$$

pv $\left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} g^{(p-1-k)} f^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \left(g^{(p-1-k)} f^{(k)}\right)'$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} g^{(p-k)} f^{(k)} + g^{(p-(k+1))} f^{(k+1)} = (-1)^{p-1} g^{(p)} f + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} g^{(p-k)} f^{(k)}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^{p-1-(\ell+1)} g^{(p-\ell)} f^{(\ell)} + (-1)^{(p-1-(p-1))} g^{(0)} f^{(p)}$$

$$= (-1)^{p-1} g^{(p)} f + g f^{(p)}$$

Rappel $k\in\mathbb{Z}$ $t\in\mathbb{R}$ $t^{[k]} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \\ 1 & \text{si } k=0 \\ \dfrac{t^k}{k!} & \text{si } k>0 \end{cases}$

$$\left(t^{[k]}\right)' = t^{[k-1]}.$$

Théorème Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^p, $\alpha, \xi\in[a,b]$

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{p-1} (\xi-\alpha)^{[k]} f^{(k)}(\alpha) + \int_\alpha^\xi (\xi-x)^{[p-1]} f^{(p)}(x)\,dx$$

$$= f(\alpha) + (\xi-\alpha) f'(\alpha) + \cdots + \frac{(\xi-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\alpha) + \int_\alpha^\xi \frac{(\xi-x)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x)\,dx$$

pv $g(x) = (\xi - x)^{[p-1]}$ $\quad 0 \leq k \leq p-1 \quad g^{(p-1-k)}(x) = (-1)^{p-1-k} (\xi - x)^{[p-1-k]}$

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} g^{(p-1-k)}(x) f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (\xi - x)^{[p-1-(p-1-k)]} f^{(k)} = \sum_{k=0}^{p-1} (\xi - x)^{[k]} f^{(k)}$$

$$(-1)^{p-1} g^{(p)} f + g f^{(p)} = (-1)^{p-1} 0 f + (\xi - x)^{[p-1]} f^{(p)}(x) = (\xi - x)^{[p-1]} f^{(p)}(x)$$

donc $\displaystyle\int_\alpha^\xi (\xi - x)^{[p-1]} f^{(p)}(x)\, dx = \left[\sum_{k=0}^{p-1} (\xi - x)^{[k]} f^{(k)}(x) \right]_\alpha^\xi$

$$= f(\xi) - \sum_{k=0}^{p-1} (\xi - \alpha)^{[k]} f^{(k)}(\alpha)$$

d'où $\displaystyle f(\xi) = \sum_{k=0}^{p-1} (\xi - \alpha)^{[k]} f^{(k)}(\alpha) + \int_\alpha^\xi (\xi - \alpha)^{[p-1]} f^{(p)}(x)\, dx$

Cor 1 (formule fondamentale du calcul intégral)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 $\quad \alpha, \xi \in [a, b]$

$$f(\xi) = f(\alpha) + \int_\alpha^\xi f'(x)\, dx$$

Cor 2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^p $\quad \alpha, \xi \in [a, b]$

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{p-1} (\xi - \alpha)^{[k]} f^{(k)}(\alpha) + (\xi - \alpha)^p \int_0^1 (1-t)^{[p-1]} f^{(p)}(\alpha + t(\xi - \alpha))\, dt$$

pv $\displaystyle\int_\alpha^\xi (\xi - x)^{[p-1]} f^{(p)}(x)\, dx = \int_0^1 (\xi - \alpha)^{p-1} (1-t)^{[p-1]} f^{(p)}(\alpha + t(\xi - \alpha)) (\xi - \alpha)\, dt$

$x = \alpha + t(\xi - \alpha) \quad dx = (\xi - \alpha)\, dt$

$(\xi - x)^{[p-1]} = ((\xi - \alpha)(1-t))^{[p-1]} = (\xi - \alpha)^{p-1} (1-t)^{[p-1]}$

$$= (\xi - \alpha)^p \int_0^1 (1-t)^{[p-1]} f^{(p)}(\alpha + t(\xi - \alpha))\, dt \quad \boxed{}$$