20/03/2007

3 D Conséquences de la condition de Riemann.

Prop. 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, Ri-intégrable, alors $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |f(t)|$ est Ri-intégrable et

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

pv ① $|f|$ vérifie la condition de Riemann si f la vérifie : $D : a = a_0 < \cdots < a_N = b$

$\forall s,t \in]a_{i-1}, a_i[\quad \big||f(s)| - |f(t)|\big| \leqslant |f(s) - f(t)|$ donc $\omega_{a_{i-1},a_i}(|f|) \leqslant \omega_{a_{i-1},a_i}(f)$

et si $\varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1},a_i}(f)(a_i - a_{i-1}) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1},a_i}(|f|)(a_i - a_{i-1})$ □

② $\forall t \in [a,b] \quad -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ donc (car de prop 4) $-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$ ■

Exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $[0,1] \cap \mathbb{Q} \ni t \mapsto -1$; $[0,1] \setminus \mathbb{Q} \ni t \mapsto 1$

n'est pas Ri-intégrable puisque $\ell(f,0,1) = -1 \neq 1 = L(f,0,1)$

mais $|f|$ est constante, donc Ri-intégrable.

Prop 7 Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Ri-intégrables alors $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Ri-intégrable.

pv comme f et g sont bornées $\exists M > 0$ tq $\forall t \in [a,b] \quad |f(t)|, |g(t)| \leqslant M$

si $t, s \in]a_{i-1}, a_i[\quad |f(s)g(s) - f(t)g(t)| = |f(s)(g(s) - g(t)) + (f(s) - f(t))g(t)|$

$\leqslant |f(s)||g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)||g(t)| \leqslant M\omega_{a_{i-1},a_i}(g) + \omega_{a_{i-1},a_i}(f)M$ d'où

$$\omega_{a_{i-1},a_i}(fg) \leqslant M(\omega_{a_{i-1},a_i}(f) + \omega_{a_{i-1},a_i}(g))$$

Si f et g vérifient la cond^n de Rie. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \sigma > 0$ tq $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ $\max(a_i - a_{i-1}) < \sigma$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1},a_i}(f)(a_i - a_{i-1}), \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1},a_i}(g)(a_i - a_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$ donc $\sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1},a_i}(fg)(a_i - a_{i-1}) \leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon$

et fg vérifie la condition de Riemann, donc est ~~Ri~~-intégrable. ■

Prop. 8 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, Ri-intégrable, alors il y a $x_0\in]a,b[$ t.q. f est continue en x_0.

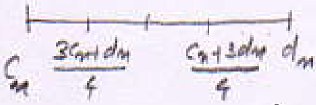
Cor Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Ri-intégrable t.q. $\forall t\in[a,b]$ $f(t)>0$ alors $\int_a^b f>0$

pv du cor : Soit $x_0\in]a,b[$ t.q. f continue en a et $0<\delta<\min(x_0-a,\,b-x_0)$ t.q.

$\forall x$ $|x-x_0|\le\delta$ ($\Rightarrow x\in[a,b]$) on a $f(x)\ge\frac{f(x_0)}{2}>0$

Comme $\forall x\in[a,b]$ $(\setminus[x_0-\delta,x_0+\delta])$ $f(x)\ge0$ $\int_a^b f\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f\ge\frac{f(x_0)}{2}2\delta=f(x_0)\delta>0$ ■.

pv de la prop. Affirmation il y a une suite d'intervalles $[c_n,d_n]\subset[a,b]$ t.q.



$[c_{n+1},d_{n+1}]\subset\left[\frac{3c_n+d_n}{4},\frac{c_n+3d_n}{4}\right]$ et (pour $n\ge0$) $\omega_{c_{n+1},d_{n+1}}(f)\le 2^{-(n-1)}$

En particulier $[c_{n+1},d_{n+1}]\subset[c_n,d_n]$ (et $d_n-c_n\le\frac{b-a}{2^n}$)

d'où $x_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[c_n,d_n]\subset[c_1,d_1]\subset]a,b[$ (en fait $\{x_0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[c_n,d_n]$)

on a $\left[x_0-\frac{d_n-c_n}{4},\,x_0+\frac{d_n-c_n}{4}\right]\subset[c_n,d_n]$ donc $\forall x$, $|x-x_0|\le\frac{d_n-c_n}{2}$ on a

$|f(x)-f(x_0)|\le\omega_{c_n,d_n}(f)\le2^{-(n-1)}$ et f est continue en x_0. □

pv de l'Aff^{n} $0\le i\le 2^k$ $a_{i,k}=a+i\frac{(b-a)}{2^k}$ $c_0=a=a_{0,1}$, $d_0=b=a_{2,1}$

Supposons $c_n=a_{k,m}$, $d_n=a_{k+2,m}$ déjà définis. Par la cond^n de Rie^m

il y a $N\ge m$ t.q., en notant $a_i=a_{i,N}$ on a

$$\sum_{i=1}^{2^N}\omega_{a_{i-1},a_i}(f)\frac{b-a}{2^N}=\sum_{i=1}^{2^N}\omega_{a_{i-1},a_i}(f)(a_i-a_{i-1})\le2^{-(m+n)}(b-a)$$

donc si j_0 est t.q. $\omega_{a_{j_0-1} a_{j_0}} = \min\left(\omega_{a_{j-1} a_j} \middle| 2^{N-m} k < j \leqslant 2^{N-m}(k+2)\right)$ on a

$$2^{N-m+1}\, \omega_{a_{j_0-1} a_{j_0}} \frac{b-a}{2^N} \leqslant \sum_{i=1}^{2^N} \omega_{a_{i-1} a_i} (a_i - a_{i-1}) \leqslant 2^{-(m+n)} (b-a)$$

donc si $c_{n+1} = \dfrac{3a_{j_0-1} + a_{j_0}}{4}$, $d_{n+1} = \dfrac{a_{j_0-1} + 3a_{j_0}}{4}$ on a $[c_{n+1}, d_{n+1}] \subset \left[\frac{3c_n + d_n}{4}, \frac{c_n + 3d_n}{4}\right]$

et $\omega_{c_{n+1} d_{n+1}} \leqslant \omega_{a_{j_0-1} a_{j_0}} \leqslant 2^{-(n-1)}$ ∎

Definition une subdivision pointée de $[a, b]$ est la donnée de $(D : a = a_0 < \cdots < a_m) \in \mathcal{D}(a,b)$ et pour $i = 1, \ldots, N$ $c_i \in]a_{i-1}, a_i[$

A une telle subdivision pointée on associe la somme de Riemann

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)(a_i - a_{i-1})$$

on a $\ell_D(f) \leqslant \sum_{i=1}^{N} f(c_i)(a_i - a_{i-1}) \leqslant L_D$ d'où la

Prop 9 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Ri-intégrable alors $\int_a^b f$ est limite des sommes de Riemann quand le plus grand des pas de la subdivision tend vers zéro.

Remarque on a posé $\lambda_i = \inf_{t \in]a_{i-1}, a_i[} f(t)$, $\Lambda_i = \sup_{t \in]a_{i-1}, a_i[} f(t)$ pour avoir « gratuitement » le cas de la Prop 5

Exercice En utilisant la condition de Riemann, prouver que la prop 9 est vraie avec $c_i \in [a_{i-1}, a_i]$ (et tout le reste avec au lieu de λ_i et Λ_i $\overline{\lambda}_i = \inf_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t)$, $\overline{\Lambda}_i = \sup_{t \in [a_{i-1}, a_i]} f(t)$)

Lois de composition sur un ensemble

1 Définitions et exemples

définition une loi de composition sur un ensemble X est une application $\perp : X \times X \to X$ $(x,y) \mapsto x \perp y$

Remarque pour les lois usuelles, au lieu de la notation $\perp$, on utilise les "notations "multiplicatives" $\cdot$ ou $\times$ $(x,y) \mapsto x \cdot y$ ou $x \times y$

ou "additives" $+$ $(x,y) \mapsto x+y$

on garde $\perp$ pour les généralités.

Exemples $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto x+y$ addition des réels

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(m,n) \mapsto m+n$ addition des entiers naturels

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto x \cdot y$ multiplication des réels

$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(m,n) \mapsto m \cdot n$ - multiplication des entiers naturels

X un ensemble $\cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ $(A,B) \mapsto A \cup B$ union des parties

$\cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ $(A,B) \mapsto A \cap B$ intersection —

$X^X = \{f : X \to X\}$ ensemble des applications de X dans X $\quad \circ : X^X \to X^X$ $(f,g) \mapsto f \circ g$ composition des applications

<u>définition</u> Soit $\perp : X\times X \to X$ une loi de composition sur X

une partie $Y\subset X$ est <u>stable</u> par $\perp$ si $\forall y, y' \in Y$ on a $y \perp y' \in Y$

La <u>restriction</u> de $\perp$ à Y est $\perp_Y : Y\times Y \to Y \ (y,y') \mapsto y\perp y'$

Ex. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sont des parties stables par $+$ et $\cdot$!

- $Inj(X) = \{f : X\to X \mid f \text{ injectives}\}$, $Surj(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ surjectives}\}$ et $\mathfrak{S}(X) = Bij(X) = \{f : X\to X \mid f \text{ bijectives}\}$ sont des parties de X^X stables par composition.

2 Propriétés d'une loi de composition

<u>def</u> une loi $\perp : X\times X\to X$ est <u>associative</u> si

$$\forall x, y, z\in X \text{ on a } (x\perp y)\perp z = x\perp (y\perp z)$$

<u>Lemme</u> Si $\perp : X\times X \to X$ est associative, $x_1, \dots, x_n \in X$ alors $x_1\perp \dots \perp x_n$ défini par récurrence x_1 si $n=1$, $x_1 \perp x_2$ si $n=2$ et $x_1\perp\dots\perp x_n = (x_1\perp \dots \perp x_{n-1})\perp x_n$ si $n\geq 2$ vérifie pour tous entiers positifs p, avec $0<p<n$ $x_1\perp\dots\perp x_n = (x_1\perp\dots\perp x_p)\perp(x_{p+1}\perp\dots\perp x_n)$ □

preuve récurrence sur $q = n-p$. Si $q=1$ $x_1\perp\dots\perp x_n \overset{def}{=} (x_1\perp\dots\perp x_{n-1})\perp x_n$

si $q\geq 2$ $(x_1\perp\dots\perp x_p)\perp(x_{p+1}\perp\dots\perp x_n) \underset{def\,de}{=} (x_1\perp\dots\perp x_p)\perp\big((x_{p+1}\perp\dots\perp x_{n-1})\perp x_n\big)$

$\underset{ass}{=} \big((x_1\perp\dots\perp x_p)\perp(x_{p+1}\perp\dots\perp x_{n-1})\big)\perp x_n \underset{rec}{=} (x_1\perp\dots\perp x_{n-1})\perp x_n \underset{def}{=} x_1\perp\dots\perp x_n$ ☒

Dans le cas $x_1 = \cdots = x_n = x$ et

de notations multiplicatives $\perp = \circ$ on note $x^n = \underbrace{x \circ \cdots \circ x}^{n \text{ fois}}$

——— additives $\perp = +$ ——— $nx = x + \cdots + x$

<u>Corollaire</u> Si p, q sont des entiers positifs ($\perp$ associative) et $x \in X$

alors (si $\perp$ notée $\circ$) (i) $x^{p+q} = x^p \circ x^q$ (ii) $x^{p \cdot q} = (x^p)^q$

(si $\perp$ notée $+$) (i') $(p+q)x = px + qx$ (ii') $q(px) = qp \cdot x$

<u>Remarque</u> Si une loi associative $\perp : X \times X \to X$ laisse stable $\square$

une partie $Y \subset X$ alors la loi induite $\perp_Y : Y \times Y \to Y$ est associative.

<u>Exemples et exercice</u>: Vérifiez les lois $+, \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont associatives

(donc les lois $+, \times$: $\begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \end{cases}$ sont associatives

b) La loi $\circ : X^X \times X^X \to X^X$ est associative (donc $\circ \, \Big| \, \mathfrak{S}(X) \times \mathfrak{S}(X) \to \mathfrak{S}(X)$ est associative

c) Les lois $\cap, \cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(E)$ sont associative

d) $\left(3^{3}\right)^{3} = 3^{9} \neq 3^{27} = 3^{(3^3)}$ donc $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto m^n$ n'est pas associative

<u>def</u> une loi $\perp : X \times X \to X$ est <u>commutative</u> si $\forall x, y \in X$ on a

$$x \perp y = y \perp x$$

<u>Lemme</u> si $+$ (resp. $\circ$) : $X \times X$ est commutative et associative

alors pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\forall x, y \in X$ $\quad n(x+y) = nx + ny$

(resp $(xy)^n = x^n \cdot y^n$)

pv (en notation multiplicative) claire pour $n=1$ $(xy)^1 = xy = x^1 \cdot y^1$

$$x^{n+1} \cdot y^{n+1} = ((x^n) \cdot x) \cdot (y^n \cdot y) \underset{ass}{=} x^n \cdot (x \cdot (y^n \cdot y)) \underset{ass}{=} x^n \cdot ((x \cdot y^n) \cdot y)$$

$$\underset{com}{=} x^n \cdot ((y^n \cdot x)) \cdot y \underset{ass}{=} x^n \cdot (y^n \cdot (x \cdot y)) \underset{ass}{=} (x^n \cdot y^n) \cdot (x \cdot y)$$

$$\underset{rec}{=} (xy)^n \cdot (x \cdot y) \underset{def}{=} (xy)^{n+1}$$ ▪

<u>Remarque</u> Si une loi commutative $\perp : X \times X \to X$ laisse stable une partie $Y \subset X$ alors la loi induite $\perp_Y : Y \times Y \to Y$ est commutative.

<u>Exemples et exercices</u> a) $+, \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\cup, \cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sont commutatives

b) Si X a plus d'un élément $\circ : X^X \times X^X \to X^X$ n'est pas commutative

b') Si X a plus de deux éléments $\circ : \mathfrak{S}(X) \times \mathfrak{S}(X) \to \mathfrak{S}(X)$ ————

<u>def</u> Un élément $e \in X$ est élément neutre d'une loi $\perp : X \times X \to X$ si

$\forall x \in X$ on a $x \perp e = x = e \perp x$

<u>Lemme</u> Soit $e', e'' \in X$ tq $\forall x \in X$ on ait $e' \perp x \overset{①}{=} x \overset{②}{=} x \perp e''$

alors $e' = e''$ est élément neutre

pv ① $x = e''$ donc $e' \perp e'' = e''$
② $x = e'$ —— $e' \perp e'' = e'$ $\Big\} \Rightarrow e' = e''$ □

<u>Remarque</u> Si Y est stable par $\perp$ et $e \in Y$ est élément neutre de $\perp : X \times X \to X$ alors e est élément neutre de $\perp_Y : Y \times Y \to Y$

<u>Exemples et exercices</u> a) 0 est élément neutre de $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 1 est él^t neutre de $\times : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

donc 0 est élément neutre de $\begin{cases} +_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} \\ +_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ +_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\end{cases}$ et 1 est élément neutre de $\begin{cases} \times_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} \\ \times_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \\ \times_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\end{cases}$

b) $\emptyset$ est élément neutre de $\cup : \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$: $\forall A\in\mathcal{P}(X)$ $A\cup\emptyset = A = \emptyset\cup A$

X ―――――――― $\cap$: ―――――――――― $A\cap X = X = X\cap A$

c) Id_X est élément neutre de $\circ : X^X \to X^X$ donc de $\circ : \mathfrak{S}(X)\times\mathfrak{S}(X)\to\mathfrak{S}(X)$

d) Soit $h : X\to X$ tq $h\circ h = h$ par exemple $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $h(0)=1$, $0<n$ $h(n)=n$

Alors $H = \{h\circ f\circ h \mid f\in X^X\}$ est stable par $\circ$:

$$(h\circ f_1\circ h)\circ(h\circ f_2\circ h) \underset{ass}{=} h\circ\big(f_1\circ(h\circ h)\circ f_2\big)\circ h = h\circ(f_1\circ h\circ f_2)\circ h.$$

et h est élément neutre de $\circ_H$ $\quad h\circ(h\circ f\circ h) = (h\circ h)\circ f\circ h = h\circ f\circ h$

$$(h\circ f\circ h)\circ h = h\circ f\circ(h\circ h) = h\circ f\circ h$$

mais h n'est élément neutre de $\circ$ que si $h = Id_X$

<u>def</u> Soit $\perp : X\times X\to X$ une loi ayant un élément neutre e et $x\in X$

alors $x'\in X$ est <u>élément symétrique</u> de x si $x'\perp x = e = x\perp x'$

en notation multiplicative on note alors $x' = x^{-1}$ $\quad x^{-1}.x = e = x.x^{-1}$
et dit x^{-1} est <u>inverse</u> de x

en notation additive on note $e = 0$ $\quad x' = -x$ $\quad x+(-x) = 0 = (-x)+x$
et dit $-x$ est <u>opposé</u> de x

<u>Remarque</u> Si x' est inverse de x alors x est inverse de x'

<u>Lemme</u> Soit $\perp : X\times X\to X$ une loi ayant un élément neutre e

et x, x', x'' tq $x'\perp x = e = x\perp x''$ alors $x' = x''$ est inverse de x

.pv $\quad x' = x'\perp e = x'\perp(x\perp x'') = (x'\perp x)\perp x'' = e\perp x'' = x''$ ∎

Lemme Soit $\perp : X \times X \to X$ une loi ayant un élément neutre e et x, y tq x a un symétrique x' et y a un symétrique y' alors $x \perp y$ a un symétrique et $(x \perp y)' = y' \perp x'$

pv $(x\perp y)\perp(y'\perp x') = x \perp (y \perp y') \perp x' = x \perp e \perp x' = x \perp (e \perp x') = x \perp x' = e$

$(y'\perp x')\perp(x\perp y) = y' \perp (x' \perp x) \perp y = y' \perp e \perp y = y' \perp (e \perp y) = y' \perp y = e$ $\square$

Rmq la seconde égalité suit aussi de la remarque $(x')' = x$ $(y')' = y$ et de la première en changeant les rôles de (x, y) et (y', x').

définition si x a un inverse x' on définit $x^0 = e$ et si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$$x^n = (x')^{-n}$$

[en notations additives $0x = 0$ et si $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ $nx = (-n)(-x)$]

En ce cas **Exercice** a) on a si $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ $x^n = \left(x^{-n}\right)^{-1}$ $\left[nx = -((-n)x)\right]$

b) $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$, $\left(x^{m \times n}\right) = \left(x^m\right)^n$

Exemple a) $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$) a un opposé pour $+$: $-x$

b) $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (resp. $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$) a un inverse pour $\times$: x^{-1}

c) $x \in \mathbb{N}$ a un opposé pour $+$ ssi $x = 0$

d) $x \in \mathbb{Z}$ a un inverse pour $\times$ ssi $x \in \{-1, 1\}$

e) $A \in \mathcal{P}(X)$ a un inverse pour $\cup$ ssi $A = \emptyset$

f) $B \in \mathcal{P}(X)$ a ——————— $\cap$ ssi $A = X$

g) $f \in X^X$ a un inverse pour $\circ$ ssi $f \in \mathfrak{S}(X) \left(= \{f \in X^X \mid \text{bijective}\}\right)$

pv $f \circ g = Id_X \Rightarrow f$ surjective $g \circ f = Id_X \Rightarrow f$ injective. $\blacksquare$