13/03/2007

Notations et rappels

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ borné ; $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall t \in [a, b]$

$$\lambda \leq f(t) \leq \Lambda$$

D : $a \leq c = c_0 < \dots < c_N = d \leq b$ subdivision de $[c, d] \subset [a, b]$

$$\mathcal{D}(c, d) = \{\text{subdivisions de } [c, d]\}$$

$$i = 1, \dots, N \quad \lambda \leq \lambda_i = \inf_{t \in]c_{i-1}, c_i[} f(t) \leq \sup_{t \in]c_{i-1}, c_i[} f(t) = \Lambda_i \leq \Lambda$$

$$\ell_D(f) = \ell_D = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \underbrace{(c_i - c_{i-1})} \leq \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i \underbrace{(c_i - c_{i-1})} = L_D = L_D(f)$$

longueur de $]c_{i-1}, c_i[$ $i^{\text{ème}}$ intervalle de la subdivision D.

Interprétation géométrique si $\forall t \in]c, d[\; f(t) \geq 0$

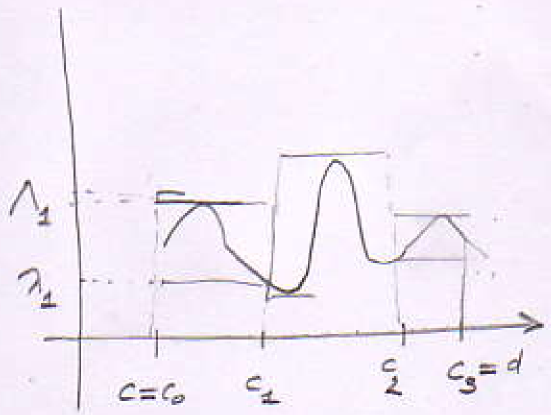
$$\bigcup_{i=1}^{N} [c_{i-1}, c_i] \times [0, \Lambda_i]$$

$$\cup$$

$$\left\{ (t, y) \;\middle|\; \begin{matrix} c < t < d \\ 0 < y < f(t) \end{matrix} \right\}$$

$$\cup$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}]c_{i-1}, c_i[\times]0, \lambda_i[$$



donc, si elle a un sens, l'aire entre l'axe des abscisses et le graphe de f est minorée par $\ell_D = \text{Aire}\left(\bigcup_{i=1}^{N}]c_{i-1}, c_i[\times]0, \lambda_i[\right)$

et majorée par $L_D = \text{Aire}\left(\bigcup_{i=1}^{N} [c_{i-1}, c_i] \times [0, \Lambda_i]\right)$

<u>Exemple</u> soit $t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ $f(t) = 1$; $t \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}$ $f(t) = 0$. $\forall D \in \mathcal{D}(a, b)$ $0 = \ell_D$ $L_D = (b - a)$

3A Définitions

Rappels ① (M121V) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ bornée $\sup_{x\in X}(-x) = -\inf_{x\in X}(x)$

donc $\inf_{x\in X} x = -\sup_{x\in X}(-x)$ et $\sup_{y\in X} y = -\inf_{y\in X}(-y)$

② (§2) $(D : c=c_0 < \dots < c_{N+M}=d) \prec (D' = c = c'_0 < \dots < c'_N = d)$ ssi $\{c'_0, \dots, c'_N\} \subset \{c_0, \dots, c_{N+M}\}$

$$L_D \leqslant L_{D'}$$

donc, par ① (et $c_i - c_{i-1} \geqslant 0$) $\ell_{D'} \leqslant \ell_D \leqslant L_D \leqslant L_{D'}$:

ainsi $\{\ell_{D} \mid D \in \mathcal{D}(c,d)\}$ est majoré (par tout $L_{D'}$) et sont
$\{L_{D'} \mid D$ 〃 $\}$ est minoré (—— $\ell_{D'}$) non vide

définition (i) $\ell(f,c,d) = \sup\{\ell_D \mid D \in \mathcal{D}(c,d)\}$

$$\wedge\!\!\!\wedge$$

$$L(f,c,d) = \inf\{L_D \mid D \in \mathcal{D}(c,d)\}$$

(ii) une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est $\begin{cases} \text{intégrable au sens de Riemann} \\ \text{(Riemann)-intégrable} \end{cases}$

sur $[a,b]$ si $\ell(f,a,b) = L(f,a,b)$

En ce cas son intégrale de a à b est $\int_a^b f = L(f,a,b)$ $(= \ell(f,a,b))$

noté aussi $\int_a^b f(t)\,dt$ (où t est une "variable muette, notation utile quand f dépend de paramètres pour préciser la "variable d'intégration")

exemple $\int_0^1 t^x\,dx \neq \int_0^1 t^x\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 e^{(\log t)x}\,dx$

$x \geqslant 0$ $\quad t > 0$

<u>Proposition</u> 1 une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Ri-intégrable.

Rappel (Mat121V f est bornée et (§2) $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ $F(x)=\inf\{L_D \mid D\in\mathcal{D}(a,x)\}$

est une primitive de f t.q. $F(a)=0$

pv comme $\forall D\in\mathcal{D}(a,x)$ $l_D(f)=-L_D(-f)$ on a on a

$$G(x)\overset{\text{déf}}{=}\sup_{D\in\mathcal{D}(a,x)} l_D(f)=\sup_{D\in\mathcal{D}(a,x)} -L_D(-f)=-\inf_{D\in\mathcal{D}(a,b)} L_D(-f)$$

G est une primitive de $-(-f)=f$ t.q. $G(a)=0$

donc $H=F-G$ vérifie $H(a)=0$ et $H'=0$ donc (Mat121V) $H=0$

c.a.d $\forall x\in[a,b]$ $F(x)=G(x)$ et $L(f,a,b)=F(b)=G(b)=l(f,a,b)$ ■

Exemple $$\int_0^1 t^x\,dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=0}^{1}=\frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^1 t^x\,dx=\left[\frac{t^x}{\log t}\right]_{x=0}^{1}=\frac{t-1}{\log t}$$

<u>Proposition</u> 2 une fonction monotone $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Ri-intégrable

pv (cas $f\nearrow$) $\forall t\in\,]a_{i-1},a_i[$ $f(a_{i-1})\leq f(t)\leq f(a_i)$ donc $f(a_{i-1})\leq\lambda_i\leq\Lambda_i\leq f(a_i)$

et $$L_D=\sum_{i=1}^N \Lambda_i(a_i-a_{i-1})\leq\sum_{i=1}^N f(a_i)(a_i-a_{i-1})$$

$$l_D=\sum_{i=1}^N \lambda_i(a_i-a_{i-1})\geq\sum_{i=1}^N f(a_{i-1})(a_i-a_{i-1})$$

d'où $$0\leq L_D-l_D\leq\sum_{i=1}^N\big(f(a_i)-f(a_{i-1})\big)(a_i-a_{i-1})\leq\sum_{i=1}^N\big(f(a_i)-f(a_{i-1})\big)\,\mathrm{Max}(a_i-a_{i-1})$$

$$\shortparallel$$
$$\big(f(b)-f(a)\big)\,\mathrm{Max}(a_i-a_{i-1})$$

donc $\forall\varepsilon>0$ $N\geq\dfrac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon}$ et $0\leq i\leq N$ $a_i=a+i\dfrac{(b-a)}{N}$ on a

$0\leq L_D-l_D\leq\dfrac{(f(b)-f(a))(b-a)}{N}\leq\varepsilon$ et $l(f,a,b)=L(f,a,b)$ ■

Exercices 1 pv pour $f \searrow$

2 Si a, c et $f : [a, b] \to [c, d]$ bijection $\nearrow$ d'inverse $g : [c, d] \to [a, b]$ alors $\int_a^b f + \int_c^d g = bd - ac$

Indication $D_1 : a = a_1 < \dots < a_N = b \quad D_2 = c = c_0 = f(a_0) < \dots < c_N = f(a_N) = d$

calculer $\ell_{D_1}(f, a, b) + L_{D_2}(g, c, d)$

<u>Remarque</u> $0 \leq L_D(f) - \ell_D(f) = \sum_{i=1}^{N} (\Lambda_i - \lambda_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1}, a_i}(f)(a_i - a_{i-1})$

et si $D \prec D'$ et $D \prec D''$ $\quad \ell_{D'} \leq \ell_D \leq L_D \leq L_{D''}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1}, a_i}(f)(a_i - a_{i-1}) = L_D(f) - \ell_D(f) \leq L_{D'}(f) - \ell_{D''}(f)$$

donc f est Ri-intégrable ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D : a = a_0 < \dots < a_N = b$ tq

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1}, a_i}(f)(a_i - a_{i-1}) \leq \varepsilon$$

En particulier f est Ri-intégrable si elle vérifie la condition Riemann

$\left[\forall \varepsilon \ \exists \delta \text{ tq } \max(a_i - a_{i-1}) \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \omega_{a_{i-1}, a_i}(f)(a_i - a_{i-1}) \leq \varepsilon \right.$

et si $N\delta \geq b - a$ $\quad i = 0, \dots, N \quad a_i = a + i\frac{b-a}{N}$ est une telle

une subdivision de $[a, b]$ avec $\left. \max(a_i - a_{i-1}) = \frac{b-a}{N} \leq \delta \right]$

pv $\Rightarrow \exists D', D'' \in \mathcal{D}(a, b)$ $\quad \left. \begin{array}{l} L_{D''}(f) \leq \int_a^b f + \varepsilon/2 \\ \ell_{D'}(f) \geq \int_a^b f - \varepsilon/2 \end{array} \right\} \Rightarrow L_D(f) - \ell_D(f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists D \in \mathcal{D}(a, b)$

$$0 \leq L(f, a, b) - \ell(f, a, b) \leq L_D(f) - \ell_D(f) \leq \varepsilon \text{ donc } L(f, a, b) = \ell(f, a, b)$$

$\blacksquare$

3B Premières propriétés de l'intégrale.

linéarité de l'intégrale

Proposition 3 Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Ri-intégrables et $\mu \in \mathbb{R}$ alors

(i) $f+g$ est Ri-intégrable et $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

(ii) μf ——— $\int_a^b \mu f = \mu \int_a^b f$

pv $a_{i-1} < t < a_i$ $\left.\begin{array}{l}\lambda_i(f) \leq f(t) \leq \Lambda_i(f) \\ \lambda_i(g) \leq g(t) \leq \Lambda_i(g)\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_i(f)+\lambda_i(g) \leq f(t)+g(t) \leq \Lambda_i(f)+\Lambda_i(g)$

donc $\lambda_i(f)+\lambda_i(g) \leq \lambda_i(f+g) \leq \Lambda_i(f+g) \leq \Lambda_i(f)+\Lambda_i(g)$

et $\ell_D(f)+\ell_D(g) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(f)(a_i-a_{i-1}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i(g)(a_i-a_{i-1}) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i(f)+\lambda_i(g))(a_i-a_{i-1})$

$\leq \sum_{i=1}^N \lambda_i(f+g)(a_i-a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^N \Lambda_i(f+g)(a_i-a_{i-1}) = L_D(f+g) \leq \cdots \leq L_D(f)+L_D(g)$

d'où $\ell(f,a,b)+\ell(g,a,b) \leq \ell(f+g,a,b) \leq L(f+g,a,b) \leq L(f,a,b)+L(g,a,b)$

$\underset{\displaystyle \int_a^b f + \int_a^b g}{\underbrace{\ell(f,a,b)+\ell(g,a,b)}_{=}}$ $\qquad$ $\underset{\displaystyle \int_a^b f + \int_a^b g}{\underbrace{L(f,a,b)+L(g,a,b)}_{=}}$

et $\ell(f+g,a,b) = L(f+g,a,b) = \int_a^b f + \int_a^b g$ $\square$

(ii) Exercice si $\mu \geq 0$ $\quad \mu\, \ell_D(f) \leq \ell_D(\mu f) \leq L_D(\mu f) \leq \mu L_D(f)$

$\mu \leq 0$ $\quad \mu L_D(f) \leq \ell_D(\mu f) \leq L_D(\mu f) \leq \mu\, \ell_D(f) \ldots$ $\square$

positivité de l'intégrale

Proposition 4 (i) 1 est Ri-intégrable et $\int_a^b 1 = b-a \geq 0$

(ii) Si f est Ri-intégrable et $\forall t \in]a,b[$ $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$

pv (i) $\forall D \in \mathcal{D}(a,b)$ $\ell_D(1,a,b) = \sum_{i=1}^N 1(a_i-a_{i-1}) = L_D(1,a,b) \Rightarrow \ell(1,a,b) = b-a = L(1,a,b)$ $\square$

(ii) $0 \leq \lambda_i = \sup_{t \in]a_{i-1},a_i[\subset]a,b[} f(t) \Rightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i(a_i-a_{i-1}) = \ell_D(f) \Rightarrow 0 \leq \ell(f,a,b) = \int_a^b f$ $\square$

monotonicité de l'intégrale

<u>Corollaire</u> Soit $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ Ri-intégrables tq $\forall t \in]a,b[\ g(t) \leq h(t)$

alors $\int_a^b g \leq \int_a^b h$

pv $f = h - g$ vérifie $\forall t \in]a,b[\ f(t) = h(t) - g(t) \geq 0$

et (Prop3) est Ri-intégrable avec $\int_a^b f = \int_a^b h - \int_a^b g$

donc (prop 4) $0 \leq \int_a^b f = \int_a^b h - \int_a^b g$ d'où $\int_a^b g \leq \int_a^b h$ $\square$

Relation de Chasles

<u>Proposition 5</u> Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$ alors

f est Ri-intégrable ssi $f_{|[a,c]} : [a,c] \to \mathbb{R}$ et $f_{|[c,b]} : [c,b] \to \mathbb{R}$ sont Ri-intégrable

En ce cas $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

<u>Corollaire</u> $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq $\{t \in [a,b] \mid f(t) \neq g(t)\}$ est fini

alors f Ri-intégrable ssi g Ri-intégrable

En ce cas $\int_a^b f = \int_a^b g$

pv récurrence sur le nb d'éléments de $\{f \neq g\}$ o

la déf de l'intégrabilité de $f_? : [a,b] \to \mathbb{R}$ (resp. $f_{|[a,c]}$, $f_{|[c,b]}$)

ne fait intervenir ni $f(a)$, ni $f(b)$ (resp ni $f(c)$).

pv de prop 5 : (1) Si $D' : a = a'_0 < \dots < a'_N = c \in \mathcal{D}(a,c)$ et $D'' = c = c''_0 < \dots < c''_M = b \in \mathcal{D}(c,b)$

$D' * D'' : a = a_0 < \dots < a_N < a_{N+1} = c_1 < \dots < a_{N+M} = c_M = b \in \mathcal{D}(a,b)$

(2) Si $D : a_0 < \dots < a_K = b \in \mathcal{D}(a,b)$

Soit $c = a_k \in \{a_0, \dots, a_K\}$ et si $\begin{cases} D' : a = a_0 < \dots < a_k = c \\ D'' : c = a_k < \dots < a_K = b \end{cases}$ on a $D = D' * D''$

soit $c \in]a_{k-1}, a_k[$ et si $\begin{cases} D' : a = a_0 < \dots < a_{k-1} < c \\ D'' : c < a_k < \dots < a_K = b \end{cases}$ on a $D' * D'' \preccurlyeq D$

dans les deux cas

$$\ell_D(f) \leq \ell_{D' * D''}(f) = \ell_{D'}(f_{|[a,c]}) + \ell_{D''}(f_{|[c,b]}) \leq L_{D'}(f_{|[a,c]}) + L_{D''}(f_{|[c,b]}) = L_{D' * D''}(f) \leq L_D(f)$$

il vient

$$\ell(f,a,b) \overset{(2)}{\leq} \ell(f_{|[a,c]},a,c) + \ell(f_{|[c,b]},c,b) \overset{(1)}{\leq} \ell(f,a,b)$$

$$L(f,a,b) \underset{(2)}{\geq} L(f_{|[a,c]},a,c) + L(f_{|[c,b]},c,b) \underset{(1)}{\geq} L(f,a,b)$$

d'où $\ell(f,a,b) = L(f,a,b)$ ssi $\begin{cases} \ell(f_{|[a,c]},a,c) = L(f_{|[a,c]},a,c) \\ \ell(f_{|[c,b]},c,b) = L(f_{|[c,b]},c,b) \end{cases}$

et, en ce cas $\int_a^b f = L(f,a,b) = L(f_{|[a,c]},a,c) + L(f_{|[c,b]},c,b) = \int_a^c f + \int_c^b f$ $\square$

<u>définition</u> Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u, v, w \in [a,b]$

$\int_u^u f = 0$ et si $v < u$ et $f_{|[v,u]}$ R.-intégrable $\int_u^v f = -\int_v^u f$

on dit alors que f est intégrable entre u et v

<u>Corollaire</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $u, v, w \in [a,b]$ alors

si f est intégrable entre u et v et entre v et w

alors elle est intégrable entre u et w et

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f$$

pv: Exercice

3 C Les fonctions Ri-intégrables vérifient la condition de Riemann

Lemme $D' : a = a'_0 < \dots < a'_N = b$ $a_k \in]a'_{k-1}, a'_k[$ $u < k$ $a_u = a'_u$; $u > k$ $a_u = a'_{u-1}$

$D : a = a_0 < \dots < a_{N+1} = b$ alors

$$L_{D'}(f) \geq L_D(f) \geq L_{D'}(f) - (\Lambda - \lambda)(a'_k - a'_{k-1}) \geq L_{D'}(f) - (\Lambda - \lambda)\max(a'_i - a'_{i-1})$$

Corollaire $(D : a = a_0 < \dots < a_{N+M} = b) < (D' : a = a'_0 < \dots < a'_N = b)$

(1) $L_{D'}(f) \geq L_D(f) \geq L_{D'}(f) - M(\Lambda - \lambda)\,\mathrm{Max}(a'_i - a'_{i-1})$

(2) $l_{D'}(f) \leq l_D(f) \leq l_{D'}(f) + M(\Lambda - \lambda)\,\mathrm{Max}(a'_i - a'_{i-1})$

pr du cor (1) récurrence sur M : Exercice

(2) suit de $l_{D''}(f) = -L_{D''}(-f)$: Exercice $\square$

pr du Lemme $\Lambda_k = \sup_{t \in]a'_{k-1}, a_k[} f(t) \leq \sup_{t \in]a'_{k-1}, a'_k[} f(t) = \Lambda'_k = \Lambda_k + \Lambda'_k - \Lambda_k \leq \Lambda_k + \Lambda - \lambda$

$$\Lambda_{k+1} = \sup_{t \in]a_k, a'_k[} f(t) \leq \sup_{t \in]a_k, a'_k[} f(t) = \Lambda'_k \leq \Lambda_{k+1} + \Lambda - \lambda$$

donc $L_{D'}(f) = \sum_{u=1}^{k-1} \Lambda'_u (a'_u - a'_{u-1}) + \Lambda'_k (a'_k - a'_{k-1}) + \sum_{u=k+1}^{N} \Lambda'_u (a'_u - a'_{u-1})$

$= \sum_{u=1}^{k-1} \Lambda_u (a_u - a_{u-1}) + \Lambda'_k (a_k - a_{k-1} + a_{k+1} - a_k) + \sum_{u=k+2}^{N+1} \Lambda_u (a_u - a_{u-1})$

$\geq \sum_{u=1}^{k-1} \Lambda_u (a_u - a_{u-1}) + \underbrace{\Lambda_k (a_k - a_{k-1}) + \Lambda_{k+1} (a_{k+1} - a_k)}_{\vee\!\mid} + \sum_{u=k+2}^{N+1} \Lambda_u (a_u - a_{u-1}) = L_D(f)$

$L_D \quad (\Lambda'_k - (\Lambda - \lambda))(a_k - a_{k-1}) + (\Lambda'_k - (\Lambda - \lambda))(a_{k+1} - a_k) = \Lambda'_k (a'_k - a'_{k-1}) - (\Lambda - \lambda)(a'_k - a'_{k-1})$

$\geq L_{D'}(f) - (\Lambda - \lambda)(a'_k - a'_{k-1})$

Théorème Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bornée alors sont équivalents

(1) $\forall\varepsilon>0\ \exists D: a=a_0<\dots<a_N=b$ tq $\sum_{i=1}^{N}\omega_{a_{i-1}a_i}(f)(a_i-a_{i-1})<\varepsilon$

(2) f est Ri-intégrable

(3) f vérifie la condition de Riemann

pv (3) $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) déjà vu (en 3.1)

(2) $\Rightarrow$ (3) $D': a=a'_0<\dots<a'_M=b \quad 0\leq L_{D'}(f)-l_{D'}(f)\leq \varepsilon/3$

δ tq $M(\Lambda-\lambda)\delta\leq\varepsilon/3$ et $D: a=a_0<\dots<a_N=b$ avec $\max(a_i-a_{i-1})\leq\delta$

$D''\ a=a''_0<\dots<a''_{N+K}=b$ (avec $K\leq M-1\leq M$) $D''\prec D$ et $D''\prec D'$

par le corollaire

$$L_{D'}(f)\geq L_{D''}(f)\geq L_D(f)-K\max(a_i-a_{i-1})\geq L_D(f)-\varepsilon/3$$

$$l_{D'}(f)\leq l_{D''}(f)\leq l_D(f)+K\max(a_i-a_{i-1})\leq l_D(f)+\varepsilon/3$$

d'où $0\leq L_D(f)-l_D(f)\leq L_{D'}(f)+\varepsilon/3-(l_{D'}(f)-\varepsilon/3)$

$$=L_{D'}(f)-l_{D'}(f)+\varepsilon/3+\varepsilon/3\leq\varepsilon \quad \blacksquare$$