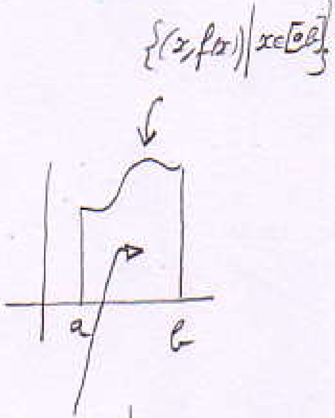
06/03/2007

Intégration

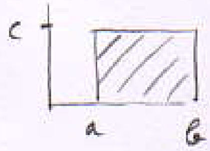
1 Introduction



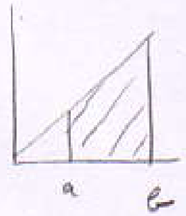
Rappels (Lycée) $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue

l'intégrale de a à b de f est l'aire de l'épigraphe $\{(x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$

Exemples 1 $f(x) = c$ cste $\displaystyle\int_a^b c = c(b-a)$

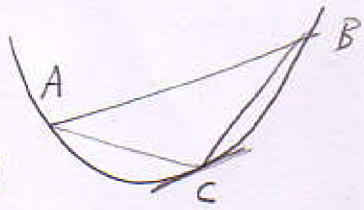


2 $f(x) = x$ $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b+a}{2}(b-a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$



3 Quadrature de la parabole par Archimède

Soit A, B deux points de la parabole (d'équation $y = x^2$)



et C le point de l'arc $\widehat{AB}$ de la parabole allant de A à B

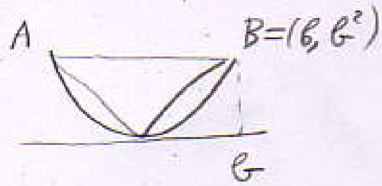
et t.q. le triangle ABC a même hauteur que l'arc $\widehat{AB}$

($\Leftrightarrow$ ABC d'aire maximale parmis les triangles ABC', $C' \in \widehat{AB}$
$\Leftrightarrow$ la tangente en C à la parabole est parallèle à la base AB du triangle)

on note $S(AB)$ le secteur de parabole entre le segment AB et l'arc $\widehat{AB}$

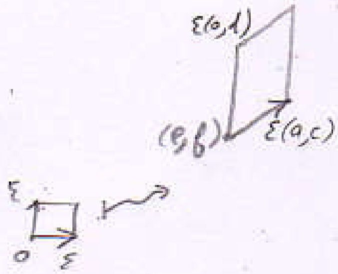
Théorème d'Archimède $\text{Aire}(S(AB)) = 4/3\ \text{Aire}(ABC)$

Corollaire $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$



pr il suffit $a=0$ $\displaystyle\int_0^x x^2 dx = b^2 b - \frac{1}{2}\text{Aire}\, S((-b,b^2),(b,b^2))$

$$= b^3 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}b^3 = \frac{1}{3}b^3 \qquad \square$$



Remarques ① une application affine du type

$(x,y) \mapsto (e+ax, f+cx+dy)$

dilate les aires algébriques de $a\,d$

①' $(x,y) \mapsto (e+ax+b, f+cx+dy) = \begin{pmatrix} e\\ f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ utile mais non nécessaire pour la pv d'Archimède

dilate les aires algébriques de $ad-bc = \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

② Si $f(x) = e+ax$, alors la parabole d'équation $y=x^2$ est invariante

par $F(x,y) = (e+ax, e^2+2aex+a^2y)$

(par ① une bijection affine qui dilate les aires de $a\times a^2 = a^3$),

pv $e^2+2aex+a^2y-(e+ax)^2 = a^2(y-x^2)$ □

②' Exercice (pour préparer la suite de l'algèbre mais —

(i) Si $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection affine conservant la parabole d'équation $y=x^2$ il y a $(a,e)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$ tq

$F(x,y) = (e+ax, e^2+2aex+a^2y)$ donc si $f(x) = e+ax$

F est construit à partir de f par le procédé de ②

(ii) Si $f'(x) = e'+a'x$ alors $f'(f(x)) = e'+a'e+a'ax = e''+a''x = f''(x)$

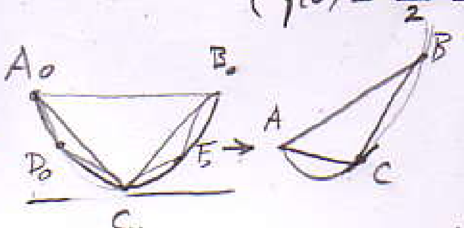
et $F' \circ F = F''$

pv du thm $x \mapsto f(x) = a+\frac{b-a}{2}(x+1) = \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x$ vérifie $\begin{cases} f(-1)=a\\ f(1)=b\\ f(0)=\frac{a+b}{2}=c\end{cases}$

donc F vérifie $F(A_0) = F(-1,1) = (a,a^2) = A$

$F(B_0) = F(1,1) = (b,b^2) = B$

$F(C_0) = F(0,0) = \left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) = C$



donc par ①' et ② $\frac{Aire(D/AB)}{Aire(ABC)} = \frac{Aire(D/A_0B_0)}{Aire(A_0B_0C_0)} =$ cste et $Aire(D/AC) = Aire(D/CB)$

de même si $g(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ $G(A_0) = C_0$, $G(B_0) = B_0$ et $G(C_0) = E_0$,

le sommet du triangle inscrit $C_0B_0E_0$ dans la parabole de base C_0B_0 et de même hauteur que l'arc $\widetilde{C_0B_0}$. donc $\frac{1}{8}$ Aire$(A_0B_0C_0)$ = Aire$(C_0B_0E_0)$
$=$ Aire$(A_0C_0D_0)$

En iterant la construction

$$\text{Aire}(S(A_0B_0)) = \text{Aire}(A_0B_0C_0) + \left(\text{Aire}(A_0C_0D_0) + \text{Aire}(C_0B_0E_0)\right) + \cdots$$
$$= \text{Aire}(A_0B_0C_0)\left[1 + 2\times\frac{1}{8} + \cdots + 2^n\times\left(\frac{1}{8}\right)^n + \cdots\right]$$

en s'arrêtant à N la somme vaut

$$\sum_{k=0}^{N}\left(2\times\frac{1}{8}\right)^k = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^N = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}}{1-1/4} = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}\right) \underset{\text{qd } N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{3} \quad \square$$

2 Primitives des fonctions continues

définition une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ est une suite finie $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$, N est l'ordre de la subdivision

pour $k = 1, \dots, N$ les nombres $a_k - a_{k-1}$ = longueur de $[a_{k-1}, a_k]$ sont les pas de la subdivision. On a $\sum_{k=1}^{N} a_k - a_{k-1} = b - a$

une subdivision $a = a'_0 < a'_1 \cdots < a'_{N'} = b$ raffine $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ si $\{a_0, \dots, a_N\} \subset \{a'_0, \dots, a'_{N'}\}$ on note $(a = a'_0 < \cdots < a'_{N'} = b) \prec (a = a_0 < \cdots < a_N = b)$

En ce cas il y a $l \in \mathbb{N}$ tq $N' = N + l$ et une suite de $l+1$ subdivisions

$t = 0, \dots, l$ $\quad a = a_0^{(t)} < \cdots < a_{N+t}^{(t)} = b$ tq $a_k^{(0)} = a_k$, $a_k^{(l)} = a'_k$ et

pour $1 \leq t \leq l$ $\quad (a = a_0^{(t)} < \cdots < a_{N+t}^{(t)} = b) \prec (a = a_0^{(t-1)} < \cdots < a_{N+t-1}^{(t-1)} = b)$

Exercices 1) $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$

2) Si $a = a'_0 < \cdots < a'_{N'} = b$, $a = a''_0 < \cdots < a''_{N''} = b$

sont deux subdivisions de $[a, b]$ et $a = a_0 < \cdots < a_N = b$

$(\max(N'; N'') \leq N \leq N' + N'' + 1)$ est la numérotation croissante

de l'union $\{a'_0, \ldots, a'_{N'}\} \cup \{a''_0, \ldots, a''_{N''}\}$ alors

$(a = a_0 < \cdots < a_N = b) \prec (a = a'_0 < \cdots < a'_{N'} = b)$ et $(a = a_0 < \cdots < a_N) \prec (a = a''_0 < \cdots < a''_{N''} = b)$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $m, M \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall t \in [a, b] \qquad m \leq f(t) \leq M$$

Pour tout $a \leq c < d \leq b$ soit $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall s \in [c, d]$ $\lambda \leq f(s) \leq \Lambda$

Soit $c = c_0 < \cdots < c_{k-1} < c_k < \cdots < c_N = d$ une subdivision de $[c, d]$

comme si $1 \leq k \leq N$ et $s \in [c_{k-1}, c_k] \subset [c, d]$ $\lambda \leq f(s) \leq \Lambda$

et $c_{k-1} < c_k$ $\{f(s) \mid s \in [c_{k-1}, c_k]\}$ est non vide borné et

$$\lambda \leq \sup_{c_{k-1} < s < c_k} f(s) \leq \Lambda$$

donc

$$\lambda(d-c) = \sum_{k=1}^{N} \lambda(c_k - c_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1} < s < c_k} f(s) \leq \sum_{k=1}^{N} \Lambda(c_k - c_{k-1}) = \Lambda(d-c)$$

En particulier la famille $\sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(s)(c_k-c_{k-1})$

quand $c=c_0<\dots<c_N=d$ parcoure toutes les subdivisions de l'intervalle $[c,d]$ est minorée (par $\lambda(d-c)$) et a donc une borne inférieure

<u>def</u> $$L(c,d)=\inf_{\substack{\text{subdivisions}\\ \text{de } [c,d]}} \sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(s)(c_k-c_{k-1})$$

qui vérifie $\lambda(d-c)\leq L(c,d)\leq \Lambda(d-c)$

<u>Exemples</u> 1 $f(x)=y$ constante $\sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(x)=y$ donc

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(x)(c_k-c_{k-1})=\sum_{k=1}^{N} y(c_k-c_{k-1})=y(d-c)$$

et $L(c,d)=y(d-c)$

2 $f(x)=x$ $\quad c_{k-1}<\sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(x)=c_k$ donc

$$s_N=\sum_{k=1}^{N} c_{k-1}(c_k-c_{k-1})\leq\sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(x)(c_k-c_{k-1})=\sum_{k=1}^{N} c_k(c_k-c_{k-1})=S_N$$

et $\frac{1}{2}(s_N+S_N)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(c_{k-1}+c_k)(c_k-c_{k-1})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(c_k)^2-(c_{k-1})^2=\frac{1}{2}(d^2-c^2)$

$$0\leq S_N-s_N=\sum_{k=1}^{N}(c_k-c_{k-1})(c_k-c_{k-1})\leq\sup_{k=1,\dots,N}(c_k-c_{k-1})\sum_{k=1}^{N}c_k-c_{k-1}=\sup_{k=1..N}(c_k-c_{k-1})(d-c)$$

donc $\frac{1}{2}(d^2-c^2) \leq S_N = \frac{1}{2}(s_N + S_N) + S_N - s_N \leq \frac{1}{2}(d^2-c^2) + \sup_{k=1,\dots,N}(c_k - c_{k-1})(d-c)$

et $L(c,d) = \frac{1}{2}(d^2-c^2)$

Exercice $f(x) = x^2 \quad [c,d] = [0,d] \quad 0 \leq k \leq N \quad c_k = \frac{kd}{N}$

calculer $\sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1}<s<c_k} s^2 (c_k - c_{k-1})$ et étudier la limite quand $N \to \infty$

<u>Théorème</u> Si $a \leq c < d \leq b$ les nombres $L(c,d)$ vérifient

(1) Si $\forall x \in]c,d[\quad \lambda \leq f(x) \leq \Lambda$ alors $\lambda(d-c) \leq L(c,d) \leq \Lambda(d-c)$

(2) Si $c < e < d$ alors $L(c,d) = L(c,e) + L(e,d)$

<u>def</u> $L(c,c) = 0$ et si $c \geq d$ $L(c,d) = -L(c,d)$

<u>Corollaire</u> Si $a \leq c, d \leq b$ les nombres $L(c,d)$ vérifient

(1) Si $\forall s \in]c,d[\quad |f(s)| \leq M$ alors $|L(c,d)| \leq M|d-c|$

(2) pour tout $a \leq c, d, e \leq b$ $L(c,d) = L(c,e) + L(e,d)$

pvd (2) par def on a $L(x,y) = -L(x,y)$ donc o.p.s $c \leq d$

(1) Si $c \leq e \leq d$ c'est (2) de Thm

- Si $e \leq c \leq d$ $L(e,d) \underset{\text{Thm}}{=} L(e,c) + L(c,d)$

donc $L(c,d) = -L(e,c) + L(e,d) \underset{\text{def}}{=} L(c,e) + L(e,d)$

- Si $c \leq d \leq e$ $L(c,e) \underset{\text{Thm(2)}}{=} L(c,d) + L(d,e)$

donc $L(c,d) = L(c,e) - L(d,e) \underset{\text{def}}{=} L(c,e) + L(e,d)$ $\boxtimes$

pv de (2) ds le thm

$\leqslant$ Soit $\varepsilon > 0$ et $c = c_0 < \dots < c_N = e = e_0 < \dots < e_M = d$ tq

$$L(c,e) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1} < s < c_k} f(s)(c_k - c_{k-1}) - \varepsilon/2 \quad \text{et } L(e,d) \geqslant \sum_{\ell=1}^{M} \sup_{e_{\ell-1} < s < e_\ell} f(s)(e_\ell - e_{\ell-1}) - \varepsilon/2$$

Si pour $N < k \leqslant N+M$ on pose $c_k = e_{k-N}$ on a

$$L(c,d) \leqslant \sum_{k=1}^{N+M} \sup_{c_{k-1} < s < c_k} f(s)(c_k - c_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} + \sum_{k=N+1}^{N+M}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1} < s < c_k} f(s)(c_k - c_{k-1}) + \sum_{\ell=1}^{M} \sup_{e_{\ell-1} < s < e_\ell} f(s)(e_\ell - e_{\ell-1})$$

$$\leqslant L(c,e) + \varepsilon/2 + L(e,d) + \varepsilon/2 = L(c,d) + L(d,e) + \varepsilon$$

$\geqslant$ Lemme Si $(c = c'_0 < \dots < c'_{N'} = d) < (c = c_0 < \dots < c_N = d)$

alors $$\sum_{k=1}^{N'} \sup_{c'_{k-1} \leqslant x < c'_k} f(s)(c'_k - c'_{k-1}) \leqslant \sum_{\ell=1}^{N} \sup_{c_\ell < s < c_{\ell-1}} f(s)(c_\ell - c_{\ell-1})$$

pv o.p.s. $N' = N+1$ et le "point rajouté" est c'_{k_0} :

$0 \leqslant k < k_0$ $c'_k = c_k$, $c'_{k_0} \in]c_{k_0-1}, c_{k_0}[$, $k_0 < k \leqslant N$ $c'_k = c_{k-1}$

la somme de gauche est $$\sum_{k=1}^{k_0-1} \sup_{c'_{k-1} < s < c_k} f(s)(c_k - c_{k-1}) + \sum_{k=k_0+1}^{N} \sup_{c_{k-1} < s < c_k} f(s)(c_k - c_{k-1})$$

$$+ \underbrace{\sup_{c_{k_0-1} < s < c'_{k_0}}}_{\wedge} f(s)(c'_{k_0} - c_{k_0-1}) + \underset{\wedge}{\sup_{c'_k < s < c_{k_0}}} f(s)(c_{k_0} - c'_{k_0})$$

$$\sup_{c_{k_0-1} < s < c_k} f(s)(c'_{k_0} - c_{k_0-1}) + \sup_{c_{k_0-1} < s < c_{k_0}} f(s)(c_{k_0} - c'_{k_0}) = \sup_{c_{k_0-1} < s < c_{k_0}} f(s)(c_{k_0} - c_{k_0-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \sup_{c_{k-1}<s<c_k} f(s)(c_k - c_{k-1})$$

$\square$

<u>Proposition</u> Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $F(x) = L(a,x)$ alors

(1) $F(a) = 0$

(2) si f est continue à droite en $x_0 \in [a,b[$ alors

F est dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0) = f(x_0)$

(2') si f est continue à gauche en $y_0 \in]a,b]$ alors

F est dérivable à gauche en y_0 et $F'_g(y_0) = f(y_0)$

<u>Corollaire</u> Si f est continue en $t_0 \in]a,b[$, F est dérivable en t_0 et $F'(t_0) = f(t_0)$

pv (1) est la déf.

(2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists 0 < \delta < b - x_0$ tq $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$ $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$

par (2) du Thm $F(x) = L(a,x) = L(a,x_0) + L(x_0,x) = F(x_0) + L(x_0,x)$

donc par (1) du thm

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leq L(x_0,x) = F(x) - F(x_0) \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

c.a.d. F est dérivable à droite en x_0 de dérivée à droite $F'_d(x_0) = f(x_0)$

(2') : Exercice

$\square$

<u>Remarque</u> Dans les définitions de $L(a,d)$ les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ n'interviennent pas. On peut donc supposer au départ $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ bornée (et poser $\inf_{a<s<b} f(s) \leq f(a), f(b) \leq \sup_{a<s<b} f(s)$)

3 L'intégrale de Riemann des fonctions bornées

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ bornée ($\exists m, M \in \mathbb{R}\ \forall t \in]a,b[\ m \leq f(t) \leq M$)

définition Soit $a \leq c < d \leq b$ l'oscillation de f sur $[c,d]$ est

$$\omega_{c,d}(f) = \sup_{c<s<d} f(s) - \inf_{c<s<d} f(s)$$

Lemme $\omega_{c,d}(f) = \sup_{c<s,t<d} |f(s) - f(t)| =$

preuve $\geq$ si $c < s, t < d$ et $f(s) > f(t)$

$$0 \leq f(s) - f(t) \leq \sup_{c<s<d} f(s) - \inf_{c<t<d} f(t) = \omega_{c,d}(f)$$

$$\text{donc } \sup_{c<s,t<d} |f(s) - f(t)| = \sup_{\substack{c<s,t<d \\ f(s)>f(t)}} f(s) - f(t) \leq \omega_{c,d}(f)$$

$\leq$ Soit $\varepsilon > 0$ et $s_0, t_0 \in]c,d[$ tq $f(s_0) \geq \sup_{c<s<t} f(s) - \varepsilon/2$

$$f(t_0) \geq \inf_{c<t<d} f(t) + \varepsilon/2$$

$$\text{donc } |f(s_0) - f(t_0)| \geq f(s_0) - f(t_0) \geq \sup_{c<s<t} f(s) - \varepsilon/2 - \inf_{c<t<d} f(t) - \varepsilon/2$$

$$= \omega_{c,d}(f) - \varepsilon \qquad \square$$

définition f vérifie la condition de Riemann quand $\sum_{k=1}^{N} \omega_{c_{k-1}c_k}(f)(a_k - a_{k-1})$ tend vers 0 quand le pas maximum $\max_{k=1..,N}(c_k - c_{k-1})$ de la subdivision $a = a_0 < \dots < a_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$ tend vers 0.