Exercices et problèmes de révision 3

Groupes

1) Soit $*$ une loi sur un ensemble X et $e_g, e_d \in X$ tels que pour tout $x \in X$ on a $e_g * x = x = x * e_d$. Prouver que $e_g = e_d$.

2) Sur $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ on définit la loi $(x, y) * (x', y') = (x\,x', x\,y' + y)$.
a) Prouver que $(G, *)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif?
b) Montrer que $G_+ = \mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}$ est un sous-groupe de G.

3) a) Soit X un ensemble. Prouver que l'ensemble $\mathfrak{S}(X)$ des bijections de X sur X, muni de la loi $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau : X \to X, \sigma \circ \tau\,(x) = \sigma\,(\tau\,(x))$ est un groupe.
b) Soit $\mathcal{A} = \{f_{a,b} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}, f_{a,b}(t) = a\,t + b\}$. En distinguant les cas $t\in [0, 1], t\in[1, +\infty]$ [où $1 = \frac{1}{t}\,t + (1 - \frac{1}{t})\,0$] et $t\in] - \infty, 0[$ prouver que $\mathcal{A}$ est l'ensemble

$$\{f \in \mathfrak{S}(\mathbf{R})\,; \forall\lambda \in [0, 1], t, u \in \mathbf{R}, f\,(\lambda\,t + (1 - \lambda)\,u) = \lambda\,f\,(t) + (1 - \lambda)\,f\,(u)\}$$

des bijections affines de $\mathbf{R}$. En déduire que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$.
c) Prouver directement que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$.
d) Ce groupe $\mathcal{A}$ est-il isomorphe au groupe G de l'exercice 2)?

4) Soit $\mathcal{A}_2 = \{F_{M,v} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,;\, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{R}), v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, F_{M,v}(x, y) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v\}$.
a) Prouver que $\mathcal{A}_2$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbf{R}^2)$.
b) Prouver que $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_2, f_{a,b} \mapsto \phi(f_{a,b}) = F_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}}$ est un morphisme de groupe.
c) On note $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\,;\, y = x^2\}$. Prouver que l'image de ϕ est $\{F \in \mathcal{A}_2\,;\, F(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}\}$.

5) Sur $G_1 = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ on définit la loi $(x, y) * (x', y') = (x\,x', x\,y' + y\,x'^{-1})$.
a) Prouver que $(G_1, *)$ est un groupe.
b) Des parties suivantes $\mathbf{R}^* \times \{0\}, \{-1\} \times \mathbf{R}, \{-1, 1\} \times \mathbf{R}, \{1\} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^* \times \mathbf{R}, \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Z}$ et $\{-1, 1\} \times \{\mathbf{Z}\}$, quelles sont des sous-groupes de G_1?
c) Prouver que pour tout $k \in \mathbf{R}$ l'ensemble $H_k = \{\big(x, k\,(x - x^{-1}\big)\,;\, x \in \mathbf{R}^*\}$ est un sous-groupe commutatif de G.

6) On note $\mathrm{D}\,(\mathbf{C}^*) = \{r_a : z \mapsto a\,z, \sigma_a : z \mapsto a\bar{z}\,; a \in \mathbf{C}^*\}$ et pour n entier positif $\mathrm{D}_n = \{r_a : z \mapsto a\,z, \sigma_a : z \mapsto a\bar{z}\,; a \in \mathbf{C}, a^n = 1\}$.
a) Prouver que $\mathrm{D}\,(\mathbf{C}^*)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbf{C})$.
b) Prouver que D_n est un sous-groupe à $2n$ éléments de $\mathrm{D}\,(\mathbf{C}^*)$.
c) Donner les tables de D_2 et D_3.
d) Prouver que D_n est commutatif si et seulement si $n \in \{1, 2\}$.
e) Prouver que $\epsilon : \mathrm{D}\,(\mathbf{C}^*) \to (\{-1, 1\}, \cdot), \epsilon\,(r_a) = +1, \epsilon\,(\sigma_a) = -1$ est un morphisme de groupe. Determiner son noyau.

7) Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Le *centre* de G est $Z\,(G) = \{z \in G\,; \forall x \in G,\; z \cdot x = x \cdot z\}$.
a) Prouver que $Z\,(G)$ est un sous-groupe de G et que $Z\,(G) = G$ si et seulement si le groupe G est abélien.
b) Prouver que $Z\,(G)$ est un groupe abélien.
c) Quels sont les centres des groupes $G, \mathcal{A}, G_1, \mathrm{D}\,(\mathbf{C}^*), \mathrm{D}_{2n+1}, \mathrm{D}_{2n}$ (définis en **2)**, **3)**, **4)** et **5)**)?
d) Le centre d'un groupe est-il son plus grand sous-groupe abélien?

8) a) Prouver que $p : \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\} \to U = \{|z| = 1\}, p\,(z) = \frac{z}{|z|}$ est un morphisme surjectif du groupe multiplicatif $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ dans $(U, \cdot)$.
b) Déterminer des isomorphisme du groupe $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ sur chacun des groupes produits $(U, \cdot) \times (\mathbf{R}^*_+, \cdot)$ et $(U, \cdot) \times (\mathbf{R}, +)$.

9) a) Prouver que si $f, f' : G \to G$ sont des morphismes d'un groupe G dans lui même tels que $f \circ f' = f' \circ f$ alors$f\,(\ker f') \subset \ker f'$.
b) Soit A un groupe abélien et $n \in \mathbf{N}$. Prouver que $p^n_A : A \to A,\; p^n_A(a) = a^n$ est un morphisme et que si $f : A \to A$ est un morphisme alors $f \circ p^n_A = p^n_A \circ f$.
c) Déduire de a) et b) que si p^n_A n'est pas injectif alors il n'y a pas de morphisme $s : A \to A$ tel que $p^n_A \circ s = \mathrm{Id}_A$, puis que p^n_A est un isomorphisme si et seulement si il y a un morphisme $s : A \to A$ tel que $p^n_A \circ s = \mathrm{Id}_A$.
d) Prouver que $p^2_{\mathbf{C}^*}$ est surjectif, mais il n'y a pas de morphisme $r : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ tel que $p^2_{\mathbf{C}^*} \circ r = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^*}$, *c.a.d.* il n'y a pas de morphisme racine carrée.

10) Soit G un groupe, e son élément neutre et $A = \{x \in G\,;\, x^2 = e\}$. Prouver que $A = \{x \in G\,;\, x = x^{-1}\}$. En déduire que $B = G\backslash A$ est stable par $x \mapsto x^{-1}$ puis
a) Si $A = G$ alors G est abélien [Pour $x, y \in G$, déterminer $(xy)^{-1}$].
b) Si G est fini alors B a un nombre pair d'éléments.
c) Si G a un nombre pair d'éléments alors il y a $x \in G\backslash\{e\}$ tel que $x^2 = e$.

11) Soit G un groupe et $\chi : G \to \mathbf{C}$ une application telle que pour tout $x, y \in G$ on a

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$$

a) Prouver que soit χ est l'application constante nulle soit $\chi = \mathrm{incl}_{\mathbf{C}^*}^{\mathbf{C}} \circ f$ où $f : G \to \mathbf{C}^*$ est un morphisme de groupes.

b) Prouver que si G est fini et $\chi \not\equiv 1$ alors $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$.

c) En déduire que si $n > 1$ et $\xi \in \mathbf{C}$ vérifie $\xi^n = 1$ et $\xi \neq 1$ alors

$$\xi + \xi^2 + \cdots + \xi^n = 0$$

Anneaux et corps

12) Soit X un ensemble muni deux lois $\perp$ et $*$ tel que $(X, \perp)$ est un groupe et $*$ est associative a un élément neutre noté 1 et est distributive par rapport à $\perp$. Soit $x, y \in X$ en développant de deux manières $(x \perp y) * (1 \perp 1)$ prouver $x \perp y = y \perp x$.

13) Soit G un groupe abélien $A = G^G$ l'ensemble des applications de G dans G est muni des lois $f + g = x \mapsto f(x) + g(x)$ et $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$.
a) $(A, +, \circ)$ est-t-il un anneau? [On distinguera les cas où $G = \{0\}$ et G a plus d'un élément].
b) Prouver que le sous ensemble $B = \mathrm{Hom}(G, G) \subset A$ des morphismes de groupes de G dans G est stable par $+$ et $\circ$ et que $(B, +, \circ)$ est un anneau commutatif.

14) Soit A un anneau et $C(A) = \{c \in A\,;\text{ pour tout } a \in A \text{ on a } a \cdot c = c \cdot a\}$.
a) Montrer que $C(A)$ est un sous-anneau de A.
b) Déterminer $C(M_2(\mathbf{R}))$. Plus généralement prouver que si n est un entier positif et A un anneau non nul (*c. a d.* tel que $0 \neq 1$) alors alors $C(M_n(A)) = \{\lambda Id_n\,;\, \lambda \in A\}$.

15) Soit A un anneau tel que tout $a \in A \setminus \{0\}$ a un inverse à gauche $a' \in A$ (*c.a.d.* $a' \cdot a = 1$). Prouver que l'inverse à gauche a' de a est un inverse à droite $(a \cdot a' = 1)$. A est-il un corps?

16) Soit A un anneau et $a, b, u \in A$ tels que $u \cdot (1 - ba) = 1$. Calculer $(1 + a \cdot (u \cdot b)) \cdot (1 - ab)$. En déduire que si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ sont deux matrices telles que $Id_n - BA$ est inversible alors $Id_n - AB$ est inversible et $(Id_n - AB)^{-1} = Id_n + A(Id_n - BA)^{-1}B$.

17) Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on a $a^2 = a$.
a) Montrer que pour tout $x \in A$ on a $2\,x = 0$. En déduire que A est commutatif.
b) Montrer que pour tout $x, y, z \in A$ alors $(x + y)z = 0$ si et seulement si
$x(y + 1)z = 0$ et $(x + 1)yz = 0$.
c) Vérifier que si X est un ensemble alors l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X muni de $Y + Z = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$ et $Y \cdot Z = Y \cap Z$ est un exemple de tel anneau A.

Intégrale fonction de la borne supérieure et formule de Taylor avec reste intégral

18) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $C^2, H \in \mathbf{R}^*$ et $g_H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g_H(x) = f(x + H) + f(x - H) - 2f(x)$.
a) Exprimer $f(x + H)$ et $f(x - H)$ en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral en x.
b) En déduire que $\displaystyle\lim_{0 \neq H \to 0} \frac{g_H(x)}{H^2} = g''(x)$.
c) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(0) = 0, 0 \neq x \mapsto f(x) = x \cos \frac{1}{x}$. Prouver que f est continue et que pour tout $x \in \mathbf{R}$ le quotient $\frac{g_H(x)}{H^2}$ a une limite quand $0 \neq H$ tend vers zéro.
Cette fonction f est-elle dérivable?

19) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction paire de classe C^2.
a) Prouver que $f'(0) = 0$.
b) Ecrire la formule de Taylor de f avec reste intégral en 0. En déduire qu'il y a une application continue $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $f(x) = f(0) + x^2 g(x)$.
c) Dans le cas $f(x) = \cos(x)$ calculer pour $x \neq 0$ le quotient $\frac{f(x) - f(0)}{x^2}$. en déduire une preuve directe de b) dans ce cas particulier.