Exercices et problèmes de révision 2

Lois de compositions

Définitions exemples et propriétés

1) Soit $X = \{m + n\sqrt{2}\,;\, m, n \in \mathbf{N}\} \subset A = \{a + b\sqrt{2}\,;\, a, b \in \mathbf{Z}\} \subset K = \{x + y\sqrt{2}\,;\, x, y \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}$.
a) Prouver que les parties K, A et X sont stables par l'addition $+$ et la multiplication $*$ de $\mathbf{R}$.
b) Les lois induites par $+$ et $*$ sont-elles associatives, commutatives? Ont-elles un élément neutre?
c) Tout élément de X a-t-il un inverse pour la loi induite par $+$?
d) Déterminer les éléments $x + y\sqrt{2} \in K$ de K qui ont un inverse pour la loi induite par $*$.

2) Soit $X = \{m + n\,i\,;\, m, n \in \mathbf{N}\} \subset A = \{a + b\,i\,;\, a, b \in \mathbf{Z}\} \subset K = \{x + y\,i\,;\, x, y \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{C}$.
a) Les parties K, A et X sont-elles stables par l'addition $+$ et la multiplication $*$ de $\mathbf{C}$?
b) Prouver que $+$ et $*$ de $\mathbf{C}$ induisent des lois associatives et commutatives sur A et K. Ont-elles un élément neutre?
c) Déterminer les éléments $a + b\,i$ de A ayant un inverse pour loi induite par $*$.
d) Déterminer les éléments $x + y\,i \in K$ de K qui ont un inverse pour la loi induite par $*$.

3) a) Prouver que la partie $C = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\,;\, a, b \in \mathbf{R}\} \subset M_2(\mathbf{R})$ est stable par l'addition et la multiplication des matrices 2×2 à coefficients réels et étudier les propriétés des lois induites.
b) Mêmes questions pour la partie $H = \{\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\,;\, \alpha, \beta \in \mathbf{C}\} \subset M_2(\mathbf{C})$

4) La loi $\perp$: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, a \perp b = a - b$ est-elle associative? commutative? a-t-elle un élément neutre?

5) Soit $a, b \in \mathbf{R}$ et la loi $\perp$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}, x \perp y = a\,x + b\,y$. Déterminer a, b pour que la loi $\perp$:
a) soit associative b) soit commutative c) ait un élément neutre.

6) Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ et la loi $\perp$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}, x \perp y = a\,x\,y + b\,x + c\,y$. Déterminer a, b, c pour que la loi $\perp$:
a) soit associative b) soit commutative c) ait un élément neutre.
d) il y a $e', e'' \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on ait $e' \perp x = x = x \perp e''$

7) Prouver que la loi $\perp$ sur $M_2(\mathbf{R})$ définie par $M \perp N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} N$ est associative.

8) Soit E un ensemble. Sur $X = \mathcal{P}(E)$ on considère les trois lois union, intersection $\cup, \cap$ et différence symétrique Δ, $A \Delta B = \{x \in E\,;\, x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$. Prouver que :
a) ces trois lois sont associatives et commutatives.
b) chacune a un élément neutre.
c) si $E \neq \emptyset$ alors seul l'élément neutre de $\cup$ (resp. $\cap$) admet un inverse pour $\cup$ (resp. $\cap$).
c) tout élément de X admet un inverse pour Δ.

9) Soit E un ensemble fini et $\perp$ une loi associative sur E telle que pour tout $x \in E$ les applications $\gamma_x, \rho_x : E \to E, \gamma_x(y) = x \perp y, \rho_x(y) = y \perp x$ sont injectives. Prouver :
a) Pour tout $x \in E$ on a $\{x \perp y\,;\, y \in E\} = E = \{y \perp x\,;\, y \in E\}$.
b) Si $x \in E$ il y a $0 < m < n = m + k \in \mathbf{N}$ tel que $x^m = x^n$. En déduire
c) que x^k est élément neutre de $\perp$ puis que tout élément de E a un inverse pour $\perp$.
d) Soit $E = \{1, 2\}$ et $\perp$: $E \times E \to E, 1 \perp 1 = 1, 1 \perp 2 = 2, 2 \perp 1 = 1, 2 \perp 2 = 2$.
d1) Vérifier que pour tout $x \in E$ l'application γ_x est injective.
d2) En est-il de même de l'application ρ_x? Est-ce que la loi $\perp$ a un élément neutre?

10) Soit $\perp$ une loi associative sur un ensemble E telle qu'il y a $e \in E$ tel que pour tout $x \in E$
a) on a $e \perp x = x$ et il y a $y \in E$ tel que $x \perp y = e$.
b) Pouvez-vous en déduire que e est élément neutre de $\perp$? [penser à l'exemple de **9)** d)].
c) Même question en remplaçant a) par a') on a $e \perp x = x$ et il y a $y \in E$ tel que $y \perp x = e$.

11) Soit $c \in \mathbf{R}, c > 0$. Prouver que a) $(x, y) \mapsto c^2 \frac{x+y}{c^2+xy}$ définit une loi sur $]-c, c[$.
b) cette loi est associative, commutative, a un élément neutre et tout élément à un inverse.

Morphismes de lois

12) On rappelle que les fonctions de trigonométrie hyperbolique $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont définies par $\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
a) Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\mathrm{th}(x) \in]-1, 1[$ et établir pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ la relation

$$\mathrm{th}(a + b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$$

b) En déduire que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = c\,\mathrm{th}(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbf{R}, +)$ sur $]-c, c[$ muni de la loi $\perp$ de **11)**, puis une résolution plus simple de **11)**.

13) Soit $t : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Prouver pour tout $M, N \in M_2(\mathbf{C})$

$$(M\,N)^t = N^t\,M^t$$

a) Cette application t est-elle un morphisme de $(M_2(\mathbf{C}), \cdot)$ vers $(M_2(\mathbf{C}), \cdot)$?
b) Prouver que, si $C \subset M_2(\mathbf{R}) \subset M_2(\mathbf{C})$ est la partie stable par composition définie en **3)** alors l'application t induit un isomorphisme de $(C, \cdot)$ sur $(C, \cdot)$.

14) Soit $s : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
a) Cette application s est-elle un morphisme de $(M_2(\mathbf{C}), \cdot)$ vers $(M_2(\mathbf{C}), \cdot)$?
b) Prouver que l'application composée de s avec l'application t de **13)** :

$$s \circ t : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{ts} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $M_2(\mathbf{C})$ muni de la multiplication des matrices.

15) Soit un ensemble E muni d'une loi de composition $\perp$ et $f : E \to E$ un morphisme de $\perp$. Prouver que la partie $F = \{x \in E\,;\, f(x) = x\}$ est stable par $\perp$.
b) En déduire une autre preuve de la première partie de **3)** a).

16) Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ et $(e, f) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
a) Calculer le produit $\begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$.
b) En déduire que, si $\delta = a + d - 1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on a :
$(e^2 + f^2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (b-c)(1 + \cdots + \delta^{n-1}) \\ 0 & \delta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$

17) Vérifier que les hypothèses de **16)** sont satisfaites par les matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en déduire la valeur de leurs puissances $n^{\text{ième}}$

18) On rappelle que si E est un ensemble et $X = \mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de ses partie l'application $\xi : X \to \{0,1\}^E, A \mapsto \xi_A, \xi_A(x) = 1$ si et seulement si $x \in A$ est bijective et son inverse est $\xi \mapsto \xi^{-1}(\{1\}) = \{x \in E\,;\, \xi(x) = 1\}$.
a) Prouver que si on identifie $\{0,1\} = \mathbf{N}/\text{mod } 2$ avec l'ensemble des plus petits restes modulo 2 alors ξ est un isomorphisme de $\mathcal{P}(E)$ muni de la loi Δ de différence symétrique définie en **8)** sur $(\mathbf{N}/\text{mod } 2)^E$ muni de l'addition des applications $\xi + \xi' : x \mapsto \xi(x) + \xi'(x) \in \mathbf{N}/\text{mod } 2$.
b) En déduire une résolution plus simple de tout ce qui concerne Δ dans **8)**.
c) Donner de même une démonstration plus simple du reste de **8)**.

Lois quotient

19) Soit $E = \mathbf{Q}^{\mathbf{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\,;\, x_n \in \mathbf{Q}\}$ l'ensemble des suites de rationnels, il est muni de l'addition et la multiplication terme à terme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} + (y_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} * (y_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_n * y_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{R}(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si $x_n - y_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On note $0 \in E$ la suite nulle[1].
a) Prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E compatible avec l'addition $+$ de E.
b) La relation $\mathcal{R}$ est-elle compatible avec la multiplication $*$ de E?
c) Soit $C = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\,;\,(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy$\} \subset E$ et $B = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\,;\,(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée$\} \subset E$. Prouver que B et C sont stables par $+$ et $*$ et que si $x \in B$ [resp. C] alors la classe $\overline{x} \subset B$ [resp. C] pour $\mathcal{R}$ est incluse dans C [resp. B].
d) Prouver que les restrictions à B et C de la relation $\mathcal{R}$ sont compatibles à la multiplication $*$ de B et C respectivement.
e) Prouver que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in C$ sont telles que $(x_n * y_n)_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{R}0$ alors soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{R}0$ soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{R}0$. Donner un contre-exemple à l'énoncé analogue pour $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in B$.

[1] la suite $0 = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où pour tout $n \in \mathbf{N}, x_n = 0$, dont tous les termes sont 0.