Exercices et problèmes de révision

Equations différentielles

1) Soit n un entier positif et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 6-fois dérivable vérifiant

$$(1) \qquad f^{(6)} - 7f^{(4)} + 2f^{(2)} + 4f = 0 \text{ et pour } k = 1, 3, 5,\ f^{(k)}(0) = 0$$

a) En considérant la fonction $g(x) = f(-x)$ prouver que f est paire.
b) Que pouvez-vous dire de l'ensemble des fonctions vérifiant le problème différentiel linéaire (1)?

2) Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un trinôme du second degré à coefficients réels et

$$(2) \qquad af'' + bf' + cf = 0$$

l'équation différentielle linéaire homogène associée.
a) Préciser des espace vectoriels E et F tels que $L_P : E \to F, f \mapsto af'' + bf' + cf$ soit bien définie, linéaire de noyau $\mathcal{S}$ l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (2) et déterminer, la dimension de $\mathcal{S}$.
b) Prouver que si $x, y \in \mathbf{R}$ alors $e_{x,y} : \mathcal{S} \to \mathbf{R}^2, f \mapsto (f(x), f(y))$ est linéaire, quand est-elle injective?
c) En déduire que, si $x \neq y$ et $b^2 - 4ac > 0$ alors pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ il y a un unique $f \in \mathcal{S}$ tel que $f(x) = u$ et $f(y) = v$.
d) Donner des contre-exemples à b) quand $x = y$ ou $b^2 - 4ac \leq 0$.

3) Rappel : si $n \in \mathbf{Z}$ et $t \in \mathbf{R}$ on définit $t^{[n]}$ par, si $n < 0, t^{[n]} = 0; t^{[0]} = 1$ et si $n > 0, t^{[n]} = \frac{1}{n!}t^n$.
a) Soit $a, b \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$ déduire de la formule du binôme la formule

$$(3) \qquad (a + b)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} a^{[k]} b^{[n-k]}$$

b) Rappeler les règles de dérivation des fonctions $t \mapsto t^{[n]}$. En déduire les dérivées des fonctions $f(t) = (t(a + b))^{[n]}$ et $g(t) = \sum_{k=0}^{n}(ta)^{[k]}(tb)^{[n-k]}$, puis une démonstration par récurrence de a).
c) Si une fonction f est N-fois dérivable on pose $f^{[0]} = f$ et si $k \in \mathbf{N}, 0 < k \leq N,\ f^{[k]} = \frac{1}{k!}f^{(k)}$.
c1) Si g est aussi N fois dérivable établir pour tout entier $m \in \mathbf{N}, 0 \leq m \leq N$ la formule

$$(3') \qquad (fg)^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} f^{[k]} g^{[m-k]}$$

c2) En déduire que si $\lambda \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}, z_{\lambda,n}(t) = e^{\lambda t} t^{[n]}$ et $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$ alors :

$$(3'') \qquad L_Q(z_{\lambda,m}) \quad [\overset{def}{=} \sum_{k=0}^{d} a_k z_{\lambda,m}^{(k)}\ ] \ = \sum_{k=0}^{d} Q^{[k]}(\lambda) z_{\lambda,m-k}$$

4) a) Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}, f(t) = \cos(t)$. Vérifier que f est solution du problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} y'(t) + \mathrm{tg}(t)y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En déduire que la primitive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ s'annulant en 0 de la fonction tangente tg est $-\log(\cos)$.
b) Soit n un entier positif, $I_n = [0, n\frac{\pi}{2}] \supset [0, \frac{n}{\sqrt{2}}[= J_n$ et $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_n(x) = \left(\cos(\frac{x}{n})\right)^{n^2}$.
Ecrire un problème de Cauchy linéaire dont la restriction g_n de f_n à I_n est solution.
c) En utilisant l'identité $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et les majorations $\cos^2(\alpha) \leq 1,\ \sin^2(\alpha) \leq \alpha^2$ établir les encadrements $1 - \frac{2x^2}{n^2} \leq \cos(\frac{x}{n}) \leq 1$ et, si $t \in J_n,\ \frac{t}{1-\frac{2t^2}{n^2}} \geq n\,\mathrm{tg}(\frac{t}{n}) \geq t$. En déduire

$$\frac{-t}{1 - \frac{2t^2}{n^2}}\, g_n(t) \leq g_n'(t) \leq -t\, g_n(t)$$

d) Résoudre les équations différentielles linéaires $y'(t) + ty(t) = 0$ et $z'(t) + \frac{t}{1-\frac{2t^2}{n^2}} z(t) = 0$.

e) Déduire de ce qui précède pour tout $t \in J_n$ l'encadrement $\left(1 - \frac{2t^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{4}} \leq g_n(t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$,
puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$ la suite $f_n(x)$ tend vers $e^{-\frac{x^2}{2}}$ et donner une estimation de $e^{-\frac{x^2}{2}} - f_n(x)$.

5) Soit $A=(a,b)$ et $C=(c,d)$ deux points distincts du plan $\Pi=\mathbf{R}^2$ et $X\subset\Pi$ une partie du plan. On note $\alpha,\gamma:\Pi\to\mathbf{R},\alpha(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2,\gamma(x,y)=(x-c)^2+(y-d)^2$.
Soit sur X la relation $<_{\mathcal{R}}$ définies par $M<_{\mathcal{R}}N$ si et seulement si $\alpha(M)+\gamma(N)\leq\alpha(N)+\gamma(M)$.
a) Interpréter géométriquement les applications α et γ.
b) Prouver que la relation $<_{\mathcal{R}}$ est réflexive et transitive.
c) Caractériser les parties X du plan Π telles que $<_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre.

6) Soit $<_E$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Une partie $X\subset E$ est dite *convexe* si pour tout $x,y\in X$ et $z\in E$ vérifiant $x<_E z$ et $z<_E y$ on a $z\in X$. Si $x,y\in E$ les *intervalles* (resp. *demi-droites*) d'*origine* x et (resp. ou) *extrémité* y sont $[x,y]=\{z\in X;x<_X z \text{ et } z<_X y\}$, $[x,y[=\{z\in X;x<_X z \text{ et } z<_X y \text{ et } z\neq y\},]x,y]=\{z\in X;x\neq z \text{ et } x<_X z \text{ et } z<_X y\}$ et $]x,y[=\{z\in X;x\neq z \text{ et } x<_X z \text{ et } z<_X y \text{ et } z\neq y\}$ (resp. $[x,\ [=\{z\in X;x<_X z\}$,
$]x,\ [=\{z\in X;x\neq z \text{ et } x<_X z\},]\ ,y]\ [=\{z\in X;z<_X y\}$ et $]\ ,y[\ [=\{z\in X;z<_X y \text{ et } z\neq y\}$.
a) Prouver que si et $X_i\subset E,i\in I,\forall i\in I,X_i$ est convexe est une famille de parties convexes de E contenant z_0 alors a1) leur intersection $\bigcap_{i\in I}X_i=\{x\in E;\forall i\in I \text{ on a } x\in X_i\}$ est convexe. a2) Si $>_E$ est total et il y a$z_0\in X_i$ alors l'union $\bigcup_{i\in I}X_i=\{x\in E;\exists i\in I \text{ tel que } x\in X_i\}$ est convexe.
b) Peut-on dans omettre dans l'hypothèses de a2) les mots « contenant z_0 » et/ou « total »?
c) L'énoncé a) reste-t-il vrai si c1) l'ensemble d'indice, I est fini et on remplace les mots « partie(s) convexe(s) » par « intervalle(s) ou demi-droite(s) »?   c2) et si de plus $<_X$ est un ordre total?
d) Une partie de E est-elle convexe si et seulement si elle est un intervalle ou une demi-droite, d1) si $<_E$ est l'ordre usuel $\leq$ sur $E\subset\mathbf{R}$ dans chacun des trois cas $E=\mathbf{R},\mathbf{Z},\mathbf{Q}$?
d2) si $<_E$ est l'inclusion $\subset$ et E l'ensemble $\mathcal{P}(Z)$ des parties d'un ensemble Z?

7) a) Rappeler ce que signifie pour une relation d'ordre *être totale* et *être un bon ordre.*
a') Prouver qu'une relation de bon ordre est totale.
b) Prouver que si $<_X$ est une relation d'ordre sur un ensemble X et $Z\subset X$ il y a au plus un élément $z_+\in Z$ (resp. $z_-\in Z$) tel que pour tout $z\in Z$ on $z<_X z_+$ (resp. $z_-<_X z$)[1].
c) Prouver si $<_X$ est une relation d'ordre total alors toute partie finie non vide $\emptyset\neq Y\subset X$ de X a un un plus grand et un plus petit élément. Donner un contre-exemple si la partie Y est infinie.
c') Déduire de c) qu'une relation d'ordre total sur un ensemble fini est une relation de bon ordre.
c") puis que si X est fini à n éléments, et $<_X$ est total alors X muni de $<_X$ est isomorphe à l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ des n premiers entiers positifs muni de l'ordre induit de celui de $\mathbf{N}$.
d) Prouver que si $<_X$ est une relation de bon ordre sur un ensemble X telle que toute partie non vide de X a un plus grand élément alors l'ensemble X est fini.

8) Soit A et B deux points distincts du plan $\Pi=\mathbf{R}^2$. On considère dans le plan les relations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}$ définies par $P\,\mathcal{T}\,Q$ si et seulement si il y a un cercle passant par A,P et Q et $P\,\mathcal{Q}\,Q$ si et seulement si il y a un cercle passant par A,B,P et Q.
a) Prouver que ces relations sont réflexives, symétriques, et que pour tou $(P,Q)\in\Pi^2$, il y a un point $R\in\Pi$ tel que $P\,\mathcal{T}\,R$ et $R\,\mathcal{T}\,Q$.   Peut-on en déduire que $\mathcal{T}$ a une seule classe?
b) Prouver que $\mathcal{Q}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.
c) Dans le cas $A=(-1,0)$ et $B=(1,0)$ déterminer en fonction des coordonnées u et v du point $M=(u,v)\in\mathbf{R}^2$ une équation[2]de la classe d'équivalence de M pour la relation d'équivalence $\mathcal{Q}$.
d) Reprendre a), b) et c) pour les relations $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{Q}'$ obtenues en remplaçant dans les définitions de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}$ les mots « il y a un cercle » par :   d1) « il y a une droite »,
d2) « il y a un cercle ou il y a une droite ».

9) Sur l'ensemble $P=\mathbf{N}\backslash\{0\}$ des entiers positifs et sa partie $U=\{m\in P;m\equiv 1 \bmod 4\}$ de ceux qui sont congrus à 1 modulo 4 on considère les relations de divisibilité $|_P$ et $|_U$ définies dans les deux cas $X=P,U$ par $m\,|_X\,n$ si et seulement si il y a $k\in X$ tel que $n=mk$. Prouver que :
a) Si $X=P,U$ la divisibilité $|_X$ est une relation d'ordre et pour tout $u,v\in X$ l'ensemble $D_X(u,v)=\{d\in X;d|_X u \text{ et } d|_X v\}$ des éléments $|_X$ majorés par u et v (les diviseurs communs) est non vide et fini. L'ensemble $M_X(u,v)=\{m\in X;u|_X m \text{ et } v|_X m\}$ des éléments $|_X$ minorés par u et v (les multiples communs) est-il aussi non vide, fini? Suit-il de vos réponses que
b) $D_X(u,v)$ (resp. $M_X(u,v)$) a un plus grand (resp. petit) élément, b1) pour l'ordre $|_X$?,
b2) pour l'ordre induit de l'ordre usuel $\leq$ de $\mathbf{N}$?
c) Déterminer $M_U(9,21)$ et $D_U(693,441)$. Le premier $M_U(9,21)$ (resp. second $D_U(693,441)$) a-t-il, pour l'ordre de divisibilité $|_U$, un plus petit (resp. grand) élément?
d) Montrer que $D_P(u,v)$ (resp. $M_P(u,v)$) a un plus grand (resp. petit) élément pour l'ordre $|_P$.

---

[1] En ce cas $z_+=\max(Z)$ (resp. $z_-=\min(Z)$) est dit *plus grand* (resp. *petit*) *élément* de Y.
[2] *c.a.d.* une fonction $f_M:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ telle que $f_M(x,y)=f(u,v)$ si et seulement si $(x,y)\,\mathcal{Q}\,(u,v)$.

10) Soit $N=2k+1, k\in\mathbf{N}\backslash\{0\}$ un entier impair supérieur à 1. On identifiera $\mathbf{N}/\mathrm{mod}N$ à l'ensemble $\{1,\dots,N\}$ des plus petits restes positifs modulo N et considère l'application d'élévation au carré

$$c:\mathbf{N}/\mathrm{mod}N\to\mathbf{N}/\mathrm{mod}N, x\mapsto x^2=xx$$

a) Prouver que si $l=1,\dots,N$ alors $c(l)=c(\overline{N-l})$. En déduire que si $k=1,\dots,N-1$ alors, soit $c^{-1}(k)=\emptyset$, soit $\mathrm{card}(c^{-1}(k))\geq 2$ (et en ce dernier cas il y a $l\in\{1,\dots,\frac{N-1}{2}\}$ tel que $c(l)=k$).
b) En déduire que l'image $c(\mathbf{N}/\mathrm{mod}N)$ de c a au plus $1+\frac{N-1}{2}=\frac{N+1}{2}$ éléments.
c) Dans les cas $N=3,5,9,15$, déterminer pour $k=1,\dots,N$ les nombres $\mathrm{card}(c^{-1}(k))$.
A-t-on toujours égalité dans la minoration de a) et la majoration de b)?
d) Prouver que si $1\leq l\leq l'=l+h\leq\frac{N-1}{2}$ alors $l+l'$ n'est pas divisible par N. En déduire que si de plus N est premier et $c(l)=c(l')$ alors $l=l'$. [on prouvera que h est divisible par N].
e) Déduire de ce qui précède que si N est premier impair alors $\mathrm{card}(c(\mathbf{N}/\mathrm{mod}N))=\frac{N+1}{2}$.

11) Dans $\mathbf{R}^2$ soit d_1,d_2,d_3 les droites vectorielles engendrées par $e_1=(0,1), e_2=(1,1), e_3=(1,0)$.
a) Soit $f,f':\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ deux isomorphismes linéaires tels que pour $i=1,2,3$ on a $f(d_i)=f'(d_i)$.
a1) Prouver que l'isomorphisme $g=f^{-1}\circ f'$ est tel que pour $i=1,2,3$ on a $g(d_i)=d_i$.
a2) En déduire qu'il y a $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ tel que la matrice de g est $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$.
b) Prouver que si $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ sont trois droites vectorielles deux à deux distinctes, et pour $i=1,2,3$ soit $f_i=(x_i,y_i)$ un vecteur engendrant δ_i alors (f_1,f_3) est une base de $\mathbf{R}^2$ et $f_2\notin\delta_1\cup\delta_3$.
En déduire que l'application linéaire f' de matrice $F'=\begin{pmatrix}y_1&-x_1\\-y_3&x_3\end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ envoyant les droites δ_1 et δ_3 sur d_1 et d_3 respectivement (pour $i=1,3$ on a $f(\delta_i)=d_i$), puis que :
Il y a un isomorphisme f'' de $\mathbf{R}^2$de matrice $F''=\begin{pmatrix}\omega'&0\\0&\omega''\end{pmatrix}$ diagonale tel que l'isomorphisme composé $f=f''\circ f'$ envoie chaque droite $\delta_j, j=1,2,3$ sur la droite d_j de même indice ($f(\delta_j)=d_j$).
Il y a-t-il unicité de (ω',ω'')? Expliciter des (ω',ω'') possibles.

12) Soit $Y\subset X$ une partie d'un ensemble X et $f:X\to X$ bijective telle que $f(Y)\subset Y$.
a) Prouver que f induit une application injective $f_Y:Y\to Y, y\mapsto f_Y(y)=f(y)$.
b) Prouver que si la partie Y est finie alors f_Y est bijective.
c) Donner un contre-exemple à la généralisation de l'énoncé de b) au cas où Y n'est pas finie.

13) On rappelle que l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel V s'identifie au quotient de l'ensemble $V\backslash\{0\}$ des vecteurs non nuls de V par la relation induite $\mathcal{L}_|$ par la colinéarité[3] $\mathcal{L}$ et que dans le cas $V=\mathbf{R}^2$ on note $P^1(\mathbf{R})=(\mathbf{R}^2\backslash\{0\})/\mathcal{L}_|$, qui est nommé *droite projective réelle* et a pour système de représentant $\{\overline{(x,1)};x\in\mathbf{R}\}\cup\{\overline{(1,0)}\}$ abrégé en $P^1(\mathbf{R})=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$.
a') Prouver que $\mathcal{L}_|$ est une relation d'équivalence sur $V\backslash\{0\}$.
a") La relation $\mathcal{L}$ est-elle une relation d'équivalence sur V?
b) A quelle condition une application $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ induit $\overline{f}=P^1(f):P^1(\mathbf{R})\to P^1(\mathbf{R})$?
b') Prouver que f linéaire induit $\overline{f}:P^1(\mathbf{R})\to P^1(\mathbf{R})$ si et seulement si f est un isomorphisme.
c) Déduire de **11)** que deux isomorphismes linéaires $f,g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ induisent la même application $\overline{f}=\overline{g}:P^1(\mathbf{R})\to P^1(\mathbf{R})$ si et seulement si elles sont colinéaires : il y a $\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$ tel que $g=\lambda f$.

14) On rappelle qu'une *homographie* est une classe d'équivalence $\overline{M}$ pour la relation de colinéarité de matrices $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbf{R}), ad-bc\neq 0$ inversibles $2{\times}2$, d'après **13)** on peut l'identifier à $\overline{f}:P^1(\mathbf{R})=\mathbf{R}\cup\{\infty\}\ni x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}\in P^1(\mathbf{R})$ induite par l'application linéaire f de matrice M.
a) Déduire de **11)**, **12)** et **13)** que si $Y\subset P^1(\mathbf{R})$ est une partie finie de $P^1(\mathbf{R})$ à au moins trois points ($\mathrm{card}(Y)\geq 3$) alors l'ensemble $H(Y)$ des homographies $\overline{f}$ tel que $\overline{f}(Y)\subset Y$ est fini.
b) Déterminer cet ensemble $H(Y)$ quand b1) $Y=\{0,\infty\}\subset\mathbf{R}\cup\{\infty\}=P^1(\mathbf{R})$
b2) $Y=\{0,1,\infty\}\subset\mathbf{R}\cup\{\infty\}=P^1(\mathbf{R})$ b3) $Y=\{-1,0,1,\infty\}\subset\mathbf{R}\cup\{\infty\}=P^1(\mathbf{R})$

15) Le *milieu de* deux point $A,B\in\mathbf{R}^n$ de l'espace $\mathbf{R}^n$ est le point $M(A,B)=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$.
Dans l'ensemble $(\mathbf{R}^n)^2$des couples de points de $\mathbf{R}^n$ (les *bipoints*) on définit l'*équipolence* $\mathcal{E}$ par $(A,B)\,\mathcal{E}\,(A',B')$ si et seulement si le milieu de A et B' coincide avec celui de A' et B :

$$(A,B)\,\mathcal{E}\,(A',B')\iff M(A,B')=M(A',B)\ (\iff\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B'=\tfrac{1}{2}A'+\tfrac{1}{2}B)$$

Prouver que l'équipolence $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence a) En calculant dans $\mathbf{R}^n$, puis
b) Après s'être aidé de figures (n=2, 3), en utilisant les seules propriétés :
pour tout $C,D,E,F\in\mathbf{R}^n$ on a : (i) $M(C)=M(C)$ (ii) $M(C,D)=M(D,C)$
(iii) $M(C,D)=M(C,E)\Rightarrow E=D$ (iv) $M(M(C,D),M(E,F))=M(M(C,E),M(D,F))$

[3] Si $u,v\in V$ alors $u\,\mathcal{L}\,v$ si et seulement si il y a $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ tels que $\lambda u+\mu v=0$

16) Soit $a, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ avec $ad \neq 0$ et $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, F(x, y) = (ax + e, cx + dy + f)$.
a) Prouver que F est bijective et déterminer la bijection inverse $G = F^{-1} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.
b) Soit $R = (r, 0), S = (s, 0), T = (t, 0), U = (r, u), V = (s, v), W = (t, w) \in \mathbf{R}^2$
b1) Déterminer les images $F(r)=R', F(S)=S', F(T)=T', F(U)=U', F(V)=V', F(W)=W'$.

On suppose désormais, et jusqu'à la question c) incluse que l'on a $r<s<t, u, v, w>0$ et f est suffisament grand pour que U', V' et W' soient au dessus de l'axe des abcisses.
b2) Tracer les quadrilatères $RSVU, STWV, TRUW$ et $R'S'V'U', S'T'W'V', T'R'U'W'$.
b3) Déterminer les aires de ces quadrilatères . Quelle relation remarque-t-on entre l'aire d'un des trois premiers quadrilatère et l'aire du quadrilatère primé correspondant?
c) En distinguant les cas où V est au dessus ou au dessous du segment UW $ad > 0$ et $ad < 0$, exprimer les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ des triangles UVW et $U'V'W'$ en fonction des aires calculées en b3).
d) Déduire de ce qui précède, dans le cas général la relation $\mathcal{A}' = |ad|\mathcal{A}$.

17) Justifier par des encadrements la preuve donnée en cours du théorème d'Archimède

L'aire $\mathcal{A}_P(A, B)$ limitée par un arc [allant d'un point A à un point B] d'une parabole [$\mathcal{P}$] et la corde [BA] correspondante est les quatre tiers de l'aire du triangle [ABC] inscrit ayant la corde [AB] pour base et même hauteur que l'arc de parabole [: $\mathcal{A}_P(A, B) = \frac{4}{3}\mathrm{Aire}(A, B, C)$].

a) Par le même procédé que dans le cours[4] et après avoir tracé, à coté des figures du cours, celles des constructions ci-dessous, prouver que si A et B sont sur la parabole $\mathcal{P}$ et C est le point de l'arc AB sur $\mathcal{P}$ où la tangente à $\mathcal{P}$ est parallèle au segment AB (le troisième sommet du triangle inscrit de même hauteur) et F et G sont les points d'intersection de cette tangente en C à $\mathcal{P}$ avec les tangentes en A et en B à $\mathcal{P}$ alors le quadrilatère $AFGB$ contient la zone limitée par l'arc de A à B sur $\mathcal{P}$ et le segment BA et est d'aire trois demi l'aire du triangle ABC.
b) Décrire un procédé d'itération analogue à celui du cours d'étape 0 a) et dont la $N^{\text{ième}}$ produit :

$$(\mathcal{A}\nabla_N) \qquad \mathrm{Aire}(A, B, C)\sum_{k=0}^{N}\Big(2\,\frac{1}{8}\Big)^k \leq \mathcal{A}_P(A, B) \leq \mathrm{Aire}(A, B, C)\Big[\sum_{k=0}^{N}\Big(2\,\frac{1}{8}\Big)^k + \frac{1}{2}\Big(2\,\frac{1}{8}\Big)^N\Big]$$

18) Soit $m, n \in \mathbf{Z}$ avec $m \leq n$. Pour tout entier k compris entre m et n ($m \leq k \leq n$) on se donne des nombres $t_k \in \mathbf{C}$ et définit la *sommation primée des t_k pour k allant de m à n* par :

$${\sum_{k=m}^{n}}' t_k = \sum_{k=m}^{n} t_k - \frac{1}{2}[t_m + t_n]$$

a) Prouver que la sommation primée vérifie la relation de Chasles : si $p \in \mathbf{Z}$ et $m \leq p \leq n$ on a

$${\sum_{k=m}^{n}}' t_k = {\sum_{k=m}^{p}}' t_k + {\sum_{k=p}^{n}}' t_k$$

b) A partir de la définition des sommes primées calculer les pour k allant de 0 à n dans les cas
b1) $t_k = k$, b2) $t_k = k^2$, b3) $b \notin \mathbf{Z}\pi$ et $t_k = \cos(2kb)$
[pour b3) penser à $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ et $\sin(c+b) = \sin(c)\cos(b) + \cos(c)\sin(b)$]
Dans les trois cas comparer les formules obtenues avec les sommes correspondantes non primées[5].

19) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la $n^{\text{ième}}$ *subdivision régulière dyadique* de $[a, b]$ est :

$$D_n : a = a_0^n < a_1^n = a + \frac{b-a}{2^n} < \ldots < a_k^n = a + k\frac{b-a}{2^n} < \ldots < a_{2^n}^n = a + 2^n\frac{b-a}{2^n} = b$$

et on pose $h_n = \frac{b-a}{2^n}$, $\quad S_n(f, a, b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} f(a_k^n)h_n$ et, $\quad T_n(f, a, b) = \displaystyle{\sum_{k=0}^{2^n}}' f(a_k^n)h_n$

a) Prouver que si f est continue croissante $S_n(f, a, b)$ est la somme $L_{D_n}(f)$ du cours, l'autre

---

[4] $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = x^2\}$ et considérer les applications F de **15)** avec $c = 2ae, d = a^2, f = e^2$
[5] que vous avez comme calcul intermédiaire!

somme du cours étant $l_{D_n}(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(a_k^n)h_n = S_n(f,a,b) - (f(b)-f(a))\,\frac{b-a}{2^n}$.
b) Prouver que si $a \leq c \leq d \leq b$ alors $T_1(f,c,d) = T_0(f,c,d) - [f(c)+f(d)-2f(\frac{c+d}{2})]\,\frac{d-c}{4}$.
c) Prouver que si $x, h \in \mathbf{R}$ sont tels que $x+h, x-h \in [a,b]$ alors $x \in [a,b]$. On définit alors

$$\Delta^2 f(x,h) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$$

d) Déduire de a), **18)** a) et b) que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a la relation de récurrence

$$(R_n) \qquad T_{n+1}(f,a,b) = T_n(f,a,b) - \frac{h_{n+1}}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \Delta^2 f(a_{2k-1}^{n+1}, h_{n+1})$$

e) On suppose qu'il y a $M > 0$ tel que la fonction f vérifie la condition de régularité :

$(D_M([a,b]))$ pour pour tout $x, h \in \mathbf{R},\ x+h, x-h \in [a,b]$ on a $|\Delta^2 f(x,h)| \leq Mh^2$

Prouver qu'alors pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\Big|T_{n+1}(f,a,b) - T_n(f,a,b)\Big| \leq \frac{M(b-a)}{4}\,\frac{(b-a)^2}{4^{n+1}}$$

f) En déduire que la suite $T_n(f,a,b)$ converge et sa limite T vérifie pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$(L_n) \qquad |T - T_n| \leq \frac{M(b-a)}{12}\,\frac{(b-a)^2}{4^n}$$

g) Peut-on déduire de (L_n) que f est intégrable au sens de Riemann et que $T_n(f,a,b)$ converge vers l'intégrale $\int_a^b f$ de f sur $[a,b]$? [penser à $f : [0,1] \to \{0,1\} \subset \mathbf{R}, f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \cap \mathbf{Q}$]
h) Prouver que si f est intégrable au sens de Riemann et vérifie la condition $(D_M([a,b]))$ alors $T_n(f,a,b)$ converge vers $\int_a^b f$. Dans le cas où de plus f est continue croissante comparez l'approximation de l'erreur donnée par (L_n) avec [Cf. a)] celle donnée par l'encadrement du cours

$$l_{D_n}(f) \leq \int_a^b f \leq L_{D_n}(f)$$

i) L'air de famille entre le $\frac{(b-a)^2}{4^n}$ dans la majoration (L_n) et le $(2\,\frac{1}{8})^N$ de l'encadrement $(\mathcal{A}\nabla_N)$ d'Archimède est-il dû au hasard ou pouvez-vous interpréter ce théorème d'Archimède comme un cas particulier de méthode des trapèzes?

20) a) Pour chacune des fonctions $f_0, f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_0(t) = \cos(t) f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2$, Déterminer par calcul algébrique ou trigonométrique direct des constantes $M_k \geq 0$ telle que, pour $k = 1, 2$ et 3 la fonction f_k vérifie, pour tout intervalle I, la condition $(D_{M_k}(I))$ de **17)**.
b) Déterminer pour chaque intervalle borné I et $k = 3, 4$ des M_k tels que $f_3, f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_3(t) = t^3$, $f_4(t) = e^t$ vérifient $(D_{M_k}(I))$. Peut-on, comme en a) prendre M_k indépendant de I?