Examen de Mat122V seconde session, Jeudi 21 juin 2007, 13h45h-16h45h

Documents et calculatrices interdits

Le barème est donné à titre indicatif et la notation tiendra compte de la rédaction :
Ne reporter sur la copie que des calculs et raisonnements aboutis. Recopier l'énoncé est inutile.

Question de cours (sur 4 points)

1) Soit A un anneau, $a, b \in A$ tels que $ab = ba$ et $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel.

a) Rappeler, si $k \in \mathbf{N}$ avec $0 \leq k \leq n$ le sens des notations $a^{n-k}b^k$ et $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$.

b) Etablir la relation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

Exercice 1 (sur 5 points)

On note $0 = 0_3$ et $I = I_3$ le zéro et l'unité de l'anneau $M_3(\mathbf{R})$ des matrices réelles 3×3. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

2) Calculer les matrices X^2, X^3, Y^2, Y^3.

3) a) Peut-on appliquer **1)** b) à $n = 2, a = X, b = Y, A = M_3(\mathbf{R})$ pour déduire que la matrice $U = X - Y$ est inversible d'inverse $X^2 + XY + Y^2$?

b) Peut-on appliquer **1)** b) à $n = 2, a = I, b = X, A = M_3(\mathbf{R})$ pour déduire que la matrice $V = I - X$ est inversible d'inverse $I + X + X^2$?

Dans chacune deux questions a) et b) une réponse juste par seulement oui ou non sans justification ne vaudra pas plus qu'un quart de point.

Exercice 2 (sur 5 points)

Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ on note $x_n = 2^{2^n} - 1$ et $F_n = 2^{2^n} + 1$

4) a) Si $m \leq n \in \mathbf{N}$ que vaut $(x_m + 1)^{2^{n-m}} - 1$? Déduire de **1)** que la divisibilité $|$ sur les entiers (si $u, v \in \mathbf{N}, u|v$ si et seulement si il y a $w \in \mathbf{N}$ tel que $v = uw$) induit sur l'ensemble $X = \{x_n \,;\, n \in \mathbf{N}\}$ une relation d'ordre total.

b) Si $m < n \in \mathbf{N}$ que vaut $(F_m - 1)^{2^{n-m}} + 1$? Déduire de la formule du binôme que si q divise F_m alors $F_n \equiv 2 \bmod q$, puis que F_m et F_n sont premiers entre eux.

Problème (sur 11 points)

Soit V un sous-espace de dimension finie $d \in \mathbf{N}$ de l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$ des fonctions $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ayant des dérivées $k^{\text{ième}} f^{(k)}$ de tout ordre $k \in \mathbf{N}$ et tel que V soit stable par dérivation : pour tout $f \in V$ on a $f' = f^{(1)} \in V$. On note $D : V \to V, D(f) = f'$ l'endomorphisme de V induit par la dérivation.

On se propose de déterminer $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{R}[X]$, un polynôme unitaire de degré d, tel que V est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle linéaire $f^{(d)} + a_{d-1}f^{(d-1)} + \cdots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = 0$ associée.

5) Prouver que l'espace engendré par les fonctions (du problème 2 de la session 1) $f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = \sin(x)\cos(x), f_2(x) = \cos^2(x), f_3(x) = \sin^2(x)$ a pour base $b_1(x) = 1, b_2(x) = \cos(2x), b_3(x) = \sin(2x)$, en déduire qu'il satisfait aux hypothèses du présent problème avec $d = 3$ et à sa conclusion avec $P(X) = X^3 + 4X$.

6) a) Prouver que si $d = 1$ alors il y a $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $t \mapsto e^{\lambda t}$ est une base de V.
b) Si $d = 2$ soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de D dans une base (f_1, f_2) de V.
Que vaut la matrice $M^2 - (\alpha+\delta)M + (\alpha\delta - \beta\gamma)I$?
c) Donner, dans chacun des cas $d = 1, 2$, un polynôme P solution du problème.

7) Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie n et $E : X \to X$ linéaire. Pour chaque $x \in X$ on définit la suite $x_k \in X, k \in \mathbf{N}$ par $x_0 = x$ et $x_{k+1} = E(x_k)$.

Prouver (recopier les affirmations suivantes comptera 0 point) que :
a) si $0 \neq x \in X$ alors il y a un plus grand entier positif $m \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ tel que la famille $x_0, \ldots, x_{m-1}$ est libre, qu'alors $1 \leq m \leq n$ et :
b) il y a $b_0, \ldots, b_{m-1} \in \mathbf{R}$ tels que $x_m = b_{m-1}x_{m-1} + \cdots + b_0 x$.
c) l'espace vectoriel $Y = < x_k \,;\, k \in \mathbf{N} >$ engendré par les x_k est de dimension m,
d) stable par E, c'est à dire pour tout $y \in Y$ on a $E(y) \in Y$ et
e) pour tout $y \in Y$ on a $y_m = b_{m-1}y_{m-1} + \cdots + b_0 y$.

On admettra que le produit par les scalaires $\mathbf{R} \times X \to X$ induit

$$\mathbf{R} \times (X/Y) \to X/Y$$

faisant du groupe additif quotient X/Y un espace vectoriel de dimension q avec $n = m + q$ et l'application quotient $\pi : X \to X/Y$ est linéaire.
f) Prouver que $E : X \to X$ induit une application linéaire $F : X/Y \to X/Y$.

8) Hors barème a) Sous les hypothèses de **7)** Prouver qu'il y a un polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{R}[X]$ unitaire de degré n tel que pour tout $x \in X$ on ait $x_n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_0 x = 0$.
[faire une récurrence sur la dimension n, en remarquant que si X est le sous-espace Y défini en **7)**c) alors on peut prendre pour polynôme P le polynôme $Q(X) = X^m - b_{m-1}X^{m-1} - \cdots - b_0 \in \mathbf{R}[X]$]
b) Déduire de ce qui précède la solution du problème dans le cas général, puis
c) Retrouver les résultats de la question **5)** en appliquant votre méthode générale avec $X = V = < f_1, f_2, f_3 >$ et $x = f_1$.