Corrigé de l'examen de Mat122V seconde session (jeudi 21 juin 2007, 13h45h-16h45h)

1) a) $a^{n-k}b^k = a^{n-k}\cdot b^k$ le produit dans l'anneau A de a^{n-k} par b^k, qui si $c=a,b\in A$ et $m=n-k, k\in\mathbf{N}$, sont définis par $c^0=1$ et la relation de récurrence $c^{m+1}=c\cdot c^m$ et $\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = a^n+a^{n-1}b+\cdots+a^{n-k}b^k+\cdots+ab^{n-1}+b^n$, ou pour $0\le m\le n$ $\sum_{k=0}^{m} a^{n-k}b^k$ est défini par $\sum_{k=0}^{0} a^{n-k}b^k = a^n$ et, si $0<m\le n$, la relation de récurrence $\sum_{k=0}^{m} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{m-1} a^{n-k}b^k + a^{n-m}b^m$.

b) De $ba=ab$ il suit, par récurrence sur $j\in\mathbf{N}$ pour tout tel j, la relation a $ba^j=a^jb$ $\quad(*)$.
d'où
$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} a\cdot a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n} b\cdot a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k+1} =$$
$$\sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{l=1}^{n+1} a^{n+1-l}b^l = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{l=1}^{n} a^{n+1-l}b^l - b^{n+1} = a^{n+1}-b^{n+1},$$
où $l=k+1$ et par $(*)$ pour $j=n-k, b\cdot a^{n-k}b^k = a^{n-k}bb^k = a^{n-k}b^{k+1}$ dans la seconde égalité.

2)
$$X^2 = \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}, \text{ d'où}$$
$$X^3 = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0 \text{ et}$$
$$Y^2 = \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \text{ d'où}$$
$$Y^3 = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = -I$$

3) a) On a bien $X^3-Y^3 = 0-(-I) = I$ et $\sum_{k=0}^{2} X^{2-k}Y^k = X^2+XY+Y^2$ mais, comme
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$
et donc $XY\neq YX$, on ne peut appliquer **1)** pour obtenir $I = X^3-Y^3 \stackrel{?}{=} (X-Y)(X^2+XY+Y^2)$.
D'ailleurs $U = X-Y = \begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, de première colonne nulle, n'est pas inversible!

b) Comme pour tout $Z\in M_3(\mathbf{R})$ on a $IZ=Z=ZI$ on a $IX=XI$ et **1)** b) s'applique :
$$I = I^3-X^3 = (I-X)\sum_{k=0}^{2} I^{2-k}X^k = (I-X)(I+X+X^2) = (I+X+X^2)(I-X)$$
(la dernière égalité a lieu car I et $-X$ commutant à chacun des termes de la somme $I+X+X^2$, $I-X$ lui commute aussi). Donc $V=I-X$ est bien inversible d'inverse $I+X+X^2$.

4) On remarque d'abord que si $m\le n$ on a $(2^{2^m})^{2^{n-m}} = 2^{2^m 2^{n-m}} = 2^{2^{m+n-m}} = 2^{2^n}$ donc :
a) comme $x_m+1 = 2^{2^m}$ on a $(x_m+1)^{2^{n-m}}-1 = 2^{2^n}-1 = x_n$. Donc pour tout $m,n\in\mathbf{N}$, puisque, quitte à les permuter, on peut supposer $m\le n$ et, d'après **1)**, $x_n = (x_m+1)^{2^{n-m}}-1 =$ $(x_m+1-1)\sum_{k=0}^{2^{n-m}}(x_m+1)^{2^{n-m}-k}$ et, comme $\sum_{k=0}^{2^{n-m}}(x_m+1)^{2^{n-m}-k}$, somme d'entiers est un entier, $x_m = x_m-1+1$ divise x_n : la divisibilité $|$ induit sur $X=\{x_n\,;\,n\in\mathbf{N}\}$ un ordre total.
b) $F_m-1 = 2^{2^m}$, $(F_m-1)^{2^{n-m}}+1 = 2^{2^n}+1 = F_n$ et, par la formule du binôme : $(F_m-1)^{2^{n-m}} =$
$$= \sum_{k=0}^{2^{n-m}}\binom{2^{n-m}}{k}(F_m)^{2^{n-m}-k}(-1)^k = \Big(\sum_{k=0}^{2^{n-m}-1}\binom{2^{n-m}}{k}(F_m)^{2^{n-m}-k}(-1)^k\Big) + (-1)^{2^{n-m}} \text{ d'où :}$$
$$F_m = (F_m-1)^{2^{n-m}}+1 = F_m\Big(\sum_{k=0}^{2^{n-m}-1}\binom{2^{n-m}}{k}(F_m)^{2^{n-m}-k-1}(-1)^k\Big) + [((-1)^2)^{2^{n-m-1}}+1] \equiv$$
$\equiv 2 \bmod F_m$, car $2^{n-m}-1, 2^{n-m-1}\in\mathbf{N}$ puisque $m<n$. Et si q divise F_m on a $F_m\equiv 2 \bmod q$.
Ainsi si q divise F_m et F_n on a $q|F_n = aq+2$ donc $q|2$. Pour tout $m\in\mathbf{N}, 2^m\ge 1$ donc $2\not| 2^{2^m}+1 = F_m$, ainsi $q=1$, c'est à dire F_m et F_n sont premiers entre eux.

5) Comme $1=\sin^2+\cos^2, \cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ et $\sin(2x)=2\sin x\cos x$, on a

$$b_1=f_2+f_3, b_2=f_2-f_3, b_3=2f_1 \quad \text{et} \qquad f_1=\frac{1}{2}b_3, f_2=\frac{1}{2}(b_1+b_2), f_3=\frac{1}{2}(b_1-b_2)$$

et les fonctions b_1, b_2, b_3 engendrent le même sous-espace W de $C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$ que f_1, f_2, f_3. Comme b_2, b_3 est une base de l'espace S_Q des solutions de l'équation différentielle $f''+4f=0$ associée à $Q(X)=X^2+4$ et que S_Q ne contient pas de constante $\lambda_1 b_1, \lambda\neq 0$ non nulle la famille b_1, b_2, b_3 est libre et est donc une base de W. Si $P(X)\overset{Def}{=}X^3+4X$ on a :

$P(X)=XQ=QX$ donc $L_P=L_Q\circ L_X=L_X\circ L_Q$ d'où $L_P(b_1)=L_Q(L_X(b_1))=L_Q(0)=0$ et pour $i=2,3, L_P(b_i)=L_X(L_Q(b_i))=L_X(0)=0$. Ainsi $W\subset S_P$ est inclus dans l'espace des solutions de l'équation $f^{(3)}+4f=0$ associée à P. Les deux espaces étant de dimension 3 il y a égalité.

6) a) Si $d=1$ il y a $f\in V\backslash\{0\}$ tel que $V=\mathbf{R}f$ donc, comme $f'\in V$, il y a $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $f'=\lambda f$. Solution non nulle de $f'-\lambda f=0, f=t\mapsto \mu e^{\lambda t}$ où $\mu\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, ainsi $t\mapsto e^{\lambda t}$ est une base de V.

b) Si $M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, M^2-(\alpha+\delta)M+(\alpha\delta-\beta\gamma)I=0$ par une identité remarquable du cours.

c) Si $d=1$ alors d'après a) $P(X)=X-\lambda$. Si $d=2$ et $P(X)=X^2+aX+b$ alors pour tout $f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\in V$ on a $L_P(f)=\mu_1 f_1+\mu_2 f_2$ où $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=(M^2+aM+bI)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$ et par b) pour $P(X)=X^2-(\alpha+\delta)X+(\alpha\delta-\beta\gamma)$ on a $V\subset S_P$: tout $f\in V$ est dans l'espace S_P des solutions de l'équation différentielle $L_P(f)=0$ associée à P d'où, car $\dim(S_P)=2=\dim V$, l'égalité $V=S_P$.

7) a) $x_0=x\neq 0$ donc la famille x_0 est libre. Comme $\dim(X)=n$ si la famille $x_0,\dots,x_{m-1}$ est libre alors $m\leq n$. L'ensemble $\{m\in\mathbf{N}\backslash\{0\}\,;\, x_0,\dots,x_{m-1} \text{ est libre }\}$ est donc une partie non vide de l'ensemble fini $\{1,\dots,n\}$ il a donc un plus grand élément m et $1\leq m\leq n$.
b) Comme $m+1>m$ la famille $x_0,\dots,x_m$ n'est pas libre et il y a $(a_0,\dots,a_m)\in\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ tel que $a_0x_0+\cdots+a_mx_m=0$ où, puisque $x_0,\dots,x_{m-1}$ est libre, $a_m\neq 0$. Soit, pour $0\leq i<m, b_i=-\frac{b_i}{a_i}$.
c) On a $<x_0,\dots,x_{m-1}>\subset<x_k\,;\,k\in\mathbf{N}>=Y$. Il y a égalité car pour $n\geq m$ on a $x_n=E^{n-m}(x_m)=E^{n-m}(b_0x_0+\cdots+b_{m-1}x_{m-1})=b_0E^{n-m}(x_0)+\cdots+b_{m-1}E^{n-m}(x_{m-1})=b_0x_{n-m}+\cdots+b_{m-1}x_{n-1}\in<x_0,\dots,x_{n-1}>$ d'où, par récurrence [initialisée par b)] sur $n\geq m$, $x_n\in<x_0,\dots,x_{m-1}>$. Comme $x_0,\dots,x_{m-1}$ est libre, c'est une base de $<x_0,\dots,x_{m-1}>=Y$.
d) $E(Y)=E(<x_k\,;\,k\in\mathbf{N}>)=<E(x_k)\,;\,k\in\mathbf{N}>=<x_{k+1}\,;\,k\in\mathbf{N}>\subset<x_k\,;\,k\in\mathbf{N}>=Y$.

e) Pour $0\leq k<m$ on a $E^m(x_k)=x_{k+m}=E^k(x_m)=E^k(\sum_{j=0}^{m-1}b_jx_j)=\sum_{j=0}^{m-1}b_jE^k(x_j)=\sum_{j=0}^{m-1}b_kx_{k+j}=\sum_{j=0}^{m-1}b_jE^j(x_k)=\sum_{j=0}^{m-1}b_j(x_k)_j$. D'où si $Y\ni y=\sum_{k=0}^{m-1}a_kx_k, y_m=E^m(\sum_{k=0}^{m-1}a_kx_k)=\sum_{k=0}^{m-1}a_kE^m(x_k)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\sum_{j=0}^{m-1}b_j(x_k)_j=\sum_{j=0}^{m-1}b_j\sum_{k=0}^{m-1}a_k(x_k)_j=\sum_{j=0}^{m-1}b_j(\sum_{k=0}^{m-1}a_k(x_k))_j=\sum_{j=0}^{m-1}b_jy_j$.
f) Si $x,x'\in X$ avec $x'\equiv x \bmod Y$ il y a $y\in Y$ tel que $x'=x+y$, donc $E(x')=E(x)+E(y)$ et comme, d'après d), $E(y)\in Y$ on a $E(x')\equiv E(x) \bmod Y$ et $\pi\circ E(x')=\pi(E(x'))=\pi(E(x))=\pi\circ E(x)$ ne dépendant que de la classe de x modulo Y : l'application $\pi\circ E: X\to X/Y$ passe au quotient en $F: X/Y\to X/Y$, qui est linéaire puisque $\pi\circ E$ l'est.

8) a) Par récurrence sur $n=\dim X\in\mathbf{N}$: Si $n=0$ l'espace V ne contient que 0 l'unique solution de $f=0$ et $P(X)=1$ convient. Sinon $V\neq\{0\}$ et il y a un $x\in V\backslash\{0\}$ à qui appliquer **7)**.

Si X et Y sont de même dimension ($n=m$) alors d'après **7)**e) $P(X)=P_x(X)\overset{Def}{=}X^m-\sum_{k=0}^{m-1}b_kX^k$ convient. Sinon $q=\dim X/Y$ vérifie $0<q=n-m<n$. Soit (hypothèse récurrence) un polynôme $Q(X)=X^q+\sum_{j=0}^{q-1}c_jX^j$ de degré q tel que pour tout $\overline{x}\in X/Y$ on ait $Q(F)(\overline{x})\overset{Def}{=}\overline{x}_q+\sum_{j=0}^{q-1}c_j\overline{x}_j=0$

donc si $x\in X, Q(E)(x)=x_q+\sum_{j=0}^{q-1}c_jx_j=y\in Y$ et, si $P=P_xQ=X^n-\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ alors, par **7)**e),

$$x_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_kx_k=P(E)(x)=P_x\circ Q(E)(x)=P_x(Q(E)(x))=P_x(E)(y)=y_m-\sum_{k=0}^{m-1}b_ky_k=0.$$

b) Par **8)**a) pour $X=V$ et $E=D: V\to V, D(f)=f'$, pour tout $f\in V$ on a :
$L_P(f)=P(D)(f)=0(f)=0$ d'où $V\subset S_P$, il y a égalité puisque $\dim V=d=\dim S_P$.
c) Si $X=V=<f_1,f_2,f_3>, E=D$ et $x=f_1$, on a $E(x)=0$ donc $P_x(X)=X$ et, comme $<f_2,f_3>$ est stable par D l'application quotient $F: X/Y\to X/Y$ s'identifie à $D:<f_2,f_3>\to<f_2,f_3>$ et $Q(X)=X^2+4$, d'où $P(X)=X(X^2+4)=X^3+4X$:

$$V=\ker L_P=\{f\in C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})\,;\, f^{(3)}+4f'=0\}$$