Examen de Mat122V première session, Mardi 22 Mai 2007, 9h-12h

Documents et calculatrices interdits

Le problème 3 est indépendant des deux autres et de la question de cours mais plus difficile, on vous conseille de ne l'aborder qu'une fois le reste terminé et reporté sur votre copie.

Le barème est donné à titre indicatif et la notation tiendra compte de la rédaction :
Ne reporter sur la copie que des calculs et raisonnements aboutis. Recopier l'énoncé est inutile.

Question de cours (sur 4 points)

1) Soit A un anneau, $a, b \in A$ tels que $ab = ba$ et $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel.
a) Rappeler, pour $a \in A$, la signification de a^n [on distinguera les cas $n = 0$ et $n > 0$].
b) En utilisant des propriétés, que l'on rappellera sans démonstration, des *coefficients du binôme* $\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$, $0 \leq j \leq m \leq n \in \mathbf{N}$, établir la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

Problème 1 (sur 8 points)

On note $0 = 0_3$ et $I = I_3$ le zéro et l'unité de l'anneau $M_3(\mathbf{R})$ des matrices réelles 3×3. Soit $Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et si $\lambda \in \mathbf{R}, X = Y_\lambda = Y + \lambda I \in M_3(\mathbf{R})$.

2) Calculer les matrices $Z = Y^2 + 4I$ et $T = ZY$. A-t-on $Z = 0$?

3) a) Prouver que si $a \in A^*$ est un élément inversible d'un anneau A et $b \in A \setminus \{0\}$ est un élément non nul de A alors le produit $ba \neq 0$ est non nul.
b) Donner un exemple d'anneau A et de deux éléments non nuls $b, c \in A \setminus \{0\}$ de l'anneau A dont le produit $bc = 0$ est nul.
c) La matrice Y est-elle inversible dans $M_3(\mathbf{R})$?

4) a) Déduire de **2)** la valeur de $Y^3 + 4Y = (X - \lambda I)^3 + 4(X - \lambda I) \in M_3(\mathbf{R})$ puis
b) en appliquant **1)** (et précisant à quel anneau A, éléments $a, b \in A \ldots$), déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbf{R}$, des réels $t_0, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ tels que $X^3 + t_2 X^2 + t_1 X + t_0 I = 0$.
c) Vérifier que si $\lambda \neq 0$ alors $t_0 \neq 0$ en déduire en ce cas que X est inversible et déterminer en fonction de λ l'inverse X^{-1} de X.

Problème 2 (sur 4 points)

Soit $f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = \sin(x)\cos(x), f_2(x) = \cos^2(x), f_3(x) = \sin^2(x)$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$ soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pour $i = 1, 2, 3$ $g_i(x) = e^{\lambda x} f_i(x)$.

Dans l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ des fonctions à valeurs réelles définie sur $\mathbf{R}$ ayant des dérivées de tout ordre on considère les sous-espaces $V =< f_1, f_2, f_3 >$ et $W = W_\lambda =< g_1, g_2, g_3 >$ engendré par f_1, f_2, f_3 et g_1, g_2, g_3 respectivement.

5) Etablir que V et W sont stables par dérivation en donnant, pour $1 \leq i, j \leq 3$ des réels $y_{i,j}, x_{i,j} \in \mathbf{R}$ tels que, pour $j = 1, 2, 3$ on ait $f'_j = \sum_{i=1}^{3} y_{i,j} f_i$ et $g'_j = \sum_{i=1}^{3} x_{i,j} g_i$

6) Déduire du problème 1 que pour tout $g \in W$ on a $g''' + t_2 g'' + t_1 g' + t_0 g = 0$.

7) a) Prouver que les fonctions g_1, g_2, g_3 sont linéairement indépendantes.
b) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation différentielle

$$g''' + 3g'' + 7g' + 5g = 0$$

Problème 3 (sur 8 points)

Soit $0 < X, \epsilon, \beta \in \mathbf{R}$ des réels positifs et $N \in \mathbf{N}$ un entier naturel.
On considère la fonction $f = f_\beta : [0, X] \to \mathbf{R}, f(x) = x^\beta$
et pose $a_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq N+1, a_k = \dfrac{X}{(1+\epsilon)^{N+1-k}}$.

8) a) Prouver que $D = (a_0, \ldots, a_{N+1})$ est une subdivision de l'intervalle $[0, X]$: c'est à dire $a_0 = 0, a_{N+1} = X$ et pour $1 \leq k \leq N+1$ on a $a_{k-1} \leq a_k$ et expliciter les pas $a_k - a_{k-1}$ (on distinguera les cas $k = 1$ et (si $N > 1$) $k > 1$)
b) Dans le cas $X = 9, \epsilon = \frac{1}{2}$ et $N = 4$ représenter sur une droite graduée les a_k.

9) Expliciter, pour $1 \leq k \leq N+1$ les $k^{\text{ième}}$ termes des sommes de Darboux

$$l_D(f) = \sum_{k=1}^{N+1} \inf_{x \in [a_{k-1}, a_k]} f(x)\,(a_k - a_{k-1}), L_D(f) = \sum_{k=1}^{N+1} \sup_{x \in [a_{k-1}, a_k]} f(x)\,(a_k - a_{k-1})$$

inférieures et supérieures de la fonction f relativement à la subdivision D.

10) Calculer l_D et en déduire a) les inégalités

$$0 \leq L_D - l_D \leq X^{\beta+1}[\frac{1}{(1+\epsilon)^{N(\beta+1)}} + \epsilon]$$

b) une preuve directe, ne faisant appel ni à l'intégrabilité des fonctions monotones ou continues, ni au calcul des primitives, de ce que la fonction f est intégrable et la valeur $\int_0^X f(x)dx$ de son intégrale sur le segment $[0, X]$.
[on pourra se limiter au cas β entier positif, ou admettre $\operatorname{Lim}_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^{\beta+1} - 1} = \frac{1}{\beta+1}$]